This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

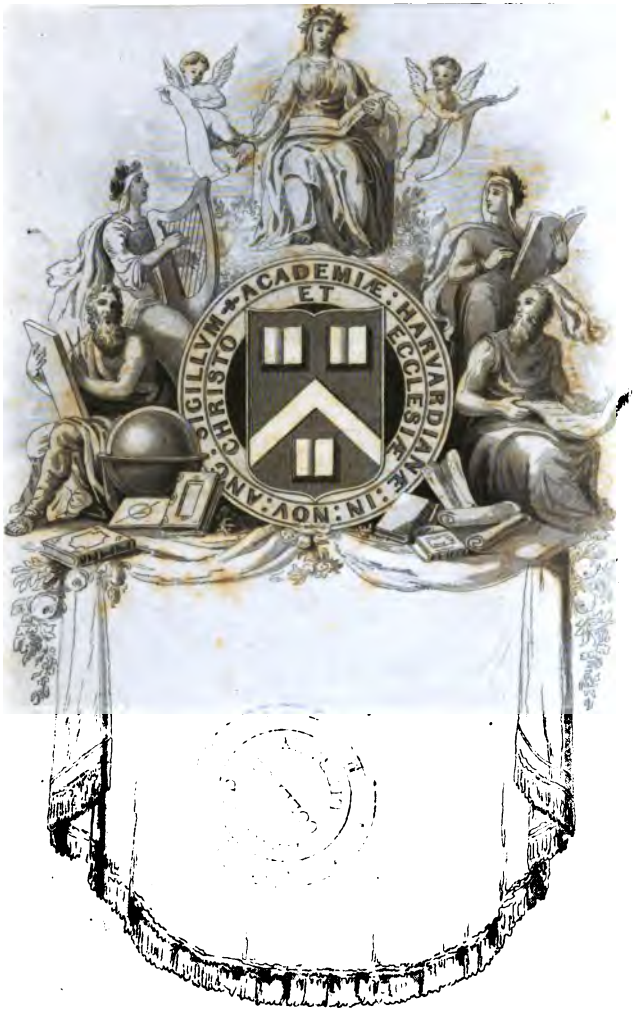
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

32.7.14.

Math 3708.41.2

SCIENCE CENTER LIBRARY



TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES;

OUVRAGE DESTINÉ A FAIRE SUITE

AUX TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL INTÉGRAL;

PAR

P. F. VERHULST,

DOCTEUR ÈS-SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE A L'ÉCOLE MILITAIRE
DE BELGIQUE.

BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE,
RUE DE L'ORANGERIE, N° 16.

1841.

~~579~~
Math 3708.41.2

1857 Dec 2

Hermann Hankel

Jacobi Lib 7971

PRÉFACE.

Pendant longtemps, les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires, ont été les seules transcendantes sur lesquelles se soit fixée l'attention des géomètres. Ce n'est que dans le siècle dernier, qu'ils ont commencé à en considérer d'autres. Parmi celles-ci, il faut distinguer les fonctions nommées *elliptiques*, dont la première idée appartient à l'immortel Euler, qui trouva l'intégrale algébrique complète de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0,$$

composée, comme on le voit, de deux termes séparés, mais semblables. Après lui, Lagrange se signala dans la même carrière, en donnant une méthode générale pour ramener, par des transformations successives, l'intégrale $\int\frac{P dx}{\sqrt{(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)}}$, dans laquelle P est une fonction rationnelle de x, à une autre intégrale semblable, plus facile à évaluer par approximation. Mais le premier qui ait approfondi la nature de ces fonctions, est l'illustre Legendre, qui depuis l'année 1786, où il a fait paraître ses premières recherches sur les arcs d'ellipse,

n'a cessé de perfectionner cette nouvelle branche d'analyse, dont on peut, à juste titre, le considérer comme le créateur. Après avoir jeté les fondements de sa doctrine, dans ses *Exercices de calcul intégral,* il rassembla les résultats de ses longues recherches, dans le *Traité des fonctions elliptiques,* publié en 1827. Jusque là, comme il le dit lui-même, les géomètres n'avaient pris presqu'aucune part à ses travaux; mais à peine son ouvrage avait-il vu le jour, à peine son titre pouvait-il être connu des savants étrangers, qu'il apprit, avec autant d'étonnement que de satisfaction, que deux jeunes mathématiciens, MM. Jacobi (C.-G.-J.) de Kœnigsberg, et Abel(*) de Christiania, avaient réussi à perfectionner la théorie

(*) Niels Henrik *Abel,* naquit le 25 août 1802, à Frindoë, sur la côte occidentale de Christiansandstifft, en Norwége. Ses travaux sur les fonctions elliptiques, et sur d'autres transcendantes auxquelles on a donné le nom de *fonctions ultra-elliptiques* ou *abéliennes,* témoignent assez ce qu'il fallait attendre de lui, si une mort prématurée n'était venue l'enlever aux sciences, le 6 avril 1829. Les géomètres les plus distingués de notre temps, parmi lesquels il suffit de nommer Poisson et Legendre, n'ont pas hésité à placer Abel au premier rang des analystes, et s'il eût été contemporain de Newton, nous pensons, avec M. Crelle (à qui nous empruntons ces détails), qu'on aurait pu dire de lui ce que Newton disait de *Cotes :* « S'il eût vécu plus longtemps, il aurait pu nous apprendre encore bien des choses ! » Il est à remarquer qu'Abel, et son digne rival Jacobi, ont marché, pour ainsi dire, de front dans leurs recherches sur les fonctions elliptiques, sans se connaître et sans se rencontrer.

Voici la liste des mémoires d'Abel sur les fonctions elliptiques, publiés dans le journal de M. Crelle :

Tome II. *Recherches sur les fonctions elliptiques,* page 101.

Tome III. Suite du mémoire précédent, page 160.

Sur le nombre de transformations différentes qu'on peut faire subir à une fonction elliptique, par la substitution d'une fonction donnée de premier degré, page 394.

Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce, page 402.

Tome IV. *Note sur quelques formules elliptiques,* page 85.

Théorème sur les fonctions elliptiques, page 194.

Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, pages 236 et 309.

des fonctions elliptiques dans ses points les plus élevés. Néanmoins, tout en rendant justice aux savantes recherches de ces géomètres, on doit convenir, avec M. De Pontécoulant (*Théorie analytique du système du monde*, tome III), que sous le rapport du calcul pratique, c'est véritablement Legendre qui a rendu les services les plus éminents à cette partie du calcul intégral. En ramenant à la forme $\int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}}$, l'intégrale générale traitée par Euler et Lagrange, il a, pour ainsi dire, mis en évidence une foule de propriétés, qui seraient peut-être restées inconnues, sans cette ingénieuse transformation de la source des fonctions elliptiques. Non content d'être le principal auteur de la théorie de ces transcendantes, il a fait pour elles ce que les successeurs de Néper ont fait pour les fonctions logarithmiques et trigonométriques : il a construit des tables, au moyen desquelles on peut, dans chaque cas, trouver la valeur numérique d'une fonction quelconque des deux premières espèces, avec toute la précision désirable, sans être astreint à des calculs laborieux. Le secours de ces tables, qui sont à elles seules un travail immense, rend l'emploi des fonctions dont il s'agit, presqu'aussi facile que celui des logarithmes et des arcs de cercle.

Après Legendre, la première place appartient incontestablement à M. Jacobi. Sans parler de son beau théorème, et des autres richesses d'analyse spéculative qu'il a prodiguées dans ses *Fundamenta* (*), la découverte de la transcendante Υ, au moyen de laquelle on peut réduire

(*) *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*; Kœnigsberg, chez les frères Borntræger; — Paris, chez Ponthieu et chez Treuttel et Wuerz.

à des fonctions de deux arguments, les transcendantes elliptiques de la troisième espèce, *à paramètre logarithmique*, lui assure à jamais la reconnaissance des géomètres, même en ne l'envisageant que sous le seul point de vue de son utilité pour le calcul pratique des transcendantes qu'on vient de mentionner.

Le titre du livre de M. Jacobi, semble annoncer un traité *ex professo*, dans lequel la théorie des fonctions elliptiques se trouve établie sur des bases nouvelles. Cependant, pour tout ce qui concerne l'origine, la classification, la comparaison et même la plupart des propriétés de ces transcendantes, l'auteur renvoie constamment à l'ouvrage de Legendre. On doit donc regarder le livre de M. Jacobi, plutôt comme un précieux complément de celui de Legendre, que comme un traité spécial, où se trouvent présentées, dans leur entier et sous une face nouvelle, les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques.

Dans une note de ses *Exercices de calcul intégral* (t. Ier, page 18), Legendre fait remarquer que les fonctions elliptiques réunissant un grand nombre de propriétés, il peut devenir nécessaire de leur imposer un nom particulier. « Il semble, dit-il, qu'on caractériserait assez bien la fonction $F(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, en lui donnant le nom de *nome*, parce que cette fonction a la propriété de régler tout ce qui concerne la comparaison des fonctions elliptiques. Peut-être conviendrait-il, en même temps, de donner les noms d'*épinome* et de *paranome*, aux fonctions E et Π, qui constituent les deux autres espèces. » L'absence de dénominations convenables, rend très-pénible, en effet, l'énonciation des propriétés de certaines fonctions analytiques, sans le secours de l'écriture. C'est surtout dans

l'enseignement que cette difficulté se fait sentir; si elle ne se trouvait levée à l'égard de la fonction $\int \frac{dx}{x}$, par exemple, par l'usage du mot *logarithme*, comment énoncerait-on la proposition, que *le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs?*

Malgré ma répugnance pour les innovations, j'ai cru devoir donner des noms aux trois espèces de fonctions elliptiques, et j'ai choisi ceux de *digamma*, d'*epsilon* et de *kappa*, en réservant la dénomination de *nome*, pour une transcendante particulière, dont la découverte est due à M. Jacobi, et que ce savant a désignée par la lettre q. J'ai dû changer aussi la notation de Legendre, pour mettre le nom de chaque transcendante, en harmonie avec le signe destiné à la représenter, et avec la notation usitée pour les fonctions logarithmiques et trigonométriques. Ainsi, j'ai dénoté par

$$\text{dig.}(c, \varphi), \quad \text{eps.}(c, \varphi), \quad \text{kap.}(n, c, \varphi),$$

les transcendantes que Legendre représente par

$$F(c, \varphi), \quad E(c, \varphi), \quad \Pi(n, c, \varphi);$$

notation qui a le grave inconvénient d'attribuer aux lettres F et Π, employées dans l'analyse comme signes généraux de fonctions, une signification particulière; ce qui empêche d'en faire usage concurremment avec d'autres transcendantes, sans avertissement préalable. Les motifs qui m'ont porté à préférer les dénominations précédentes, à celles de *nome*, d'*épinome* et de *paranome*, sont les suivants :

1° La lettre F, employée par Legendre pour désigner la fonction $\int \frac{d\varphi}{\Delta}$, porte en grec (*) le nom de δίγαμμα.

(*) Les Éoliens se servaient de cette lettre, pour remplacer le signe d'aspiration que les grammairiens appellent *l'esprit rude*.

2° La lettre D, initiale du mot *digamma*, que j'ai employée pour dénoter la fonction complète de première espèce, *précède*, dans l'ordre alphabétique, la lettre E, adoptée par Legendre, et que j'ai conservée pour désigner la fonction complète de seconde espèce.

3° En donnant aux fonctions de seconde et de troisième espèce, le nom de la lettre qui représente leur valeur devenue complète, j'ai suivi l'exemple de Legendre lui-même, qui a nommé le *gamma* de p, et dénoté par $\Gamma(p)$, l'intégrale définie $\int_0^1 dx\left(\log.\frac{1}{x}\right)^{p-1}$.

L'avantage de la nouvelle notation sur celle de Legendre, devient frappant, si l'on considère que je propose d'énoncer le *kappa circulaire de* λ, *de* c *et de* φ, et de désigner par kac. (λ, c, φ), la transcendante que Legendre a nommée *fonction elliptique de troisième espèce, à paramètre circulaire*, et dénotée par $\Pi(-1+b^2\sin.^2\lambda, c, \varphi)$.

Pour ne pas sortir du cadre d'un livre élémentaire, j'ai cru devoir passer sous silence, ou rejeter dans des notes placées à la fin du volume, tout ce qui ne se rattachait pas directement à la théorie des transcendantes elliptiques, ou qui me paraissait offrir un caractère trop particulier. Indépendamment du grand traité de Legendre, dont celui-ci n'est en quelque sorte qu'un abrégé, j'ai fait des emprunts plus ou moins considérables aux ouvrages de MM. *Jacobi, Lacroix, Poisson, De Pontécoulant,* ainsi qu'au journal de M. *Crelle;* et si j'ai cru pouvoir profiter de cette occasion, pour livrer au public les résultats de mes propres recherches, je n'ai usé de cette faculté qu'avec une extrême circonspection. Parmi ces résultats, je me bornerai à citer, en les recommandant à l'indulgence des géomètres :

La formule générale qui sert à réduire aux transcendantes elliptiques l'intégrale $\int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2\varphi}}$, dans laquelle Q désigne une fonction rationnelle quelconque de $\sin.^2\varphi$.

La représentation géométrique des fonctions elliptiques par des secteurs de courbes polaires, ainsi que de la transcendante Υ par un héliçoïde.

La réduction (sous forme imaginaire) des transcendantes elliptiques de troisième espèce, *à paramètre circulaire*, à des fonctions de deux arguments.

Les développements des fonctions elliptiques en séries convergentes, pour toutes les valeurs du paramètre, du module et de l'amplitude.

La démonstration de la formule approximative

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta} = \log. \left(\frac{4}{b}\right).$$

L'application de la double méthode des modules croissants et décroissants, au calcul de la transcendante Υ, ainsi que le développement de cette transcendante, tant en fonction de q et de x, qu'en fonction de r et de x.

Enfin, la plus grande partie du chapitre XIV, qui contient l'expression transcendante de la loi de dérivation des paramètres successifs, dans les fonctions elliptiques de la troisième espèce, et une nouvelle méthode pour calculer les fonctions complètes des deux premières espèces, avec un grand nombre de décimales exactes.

NOTICE HISTORIQUE

SUR LEGENDRE (*).

Legendre (Adrien-Marie), né à Paris en 1752, se distingua d'abord par ses succès dans l'enseignement des sciences mathématiques à l'école militaire de Paris, et il n'avait pas encore atteint sa trentième année, qu'il débuta dans la carrière des sciences par un de ses plus beaux mémoires, celui où il traite de *l'attraction des sphéroïdes*, qui lui ouvrit, l'année suivante, les portes de l'académie des sciences (1783). Les autres travaux de Legendre eurent pour objet des questions non moins importantes, telles que celle de la *figure des planètes*, composées de couches soit *homogènes* soit *hétérogènes*. Ayant pris part, en 1787, à une opération astronomique qui avait pour but de lier le méridien de Paris à celui de Greenwich, il fut conduit à s'occuper de trigonométrie, et la science y gagna plusieurs beaux théorèmes. Legendre est encore auteur d'une *Nouvelle méthode pour la détermination de l'orbite des comètes* (1805), de la règle de calcul si ingénieuse qu'il a nommée *méthode des moindres*

(*) *Mémorial encyclopédique de Bailly de Merlieux*, tome III.

carrés des erreurs, et de recherches sur les *intégrales eulériennes*. Il a coopéré au calcul des grandes *tables de logarithmes*, construites sous la direction de Prony en 1794, et qui sont restées inédites. On lui soit aussi des *Éléments de géométrie*, ouvrage réimprimé bien des fois et devenu classique dans le monde entier ; des *Exercices de calcul intégral* (1811 à 1819), et un exellent *Essai sur la théorie des nombres*, publié en 1798 et réimprimé avec de nombreuses additions en 1816. Mais un genre de recherches, qui fut pour lui un objet de prédilection sur lequel il est revenu bien des fois, est celui qu'il a terminé par un grand ouvrage, où est réuni en corps de doctrine tout ce qu'il a fait sur les *transcendantes elliptiques*. Legendre est un des hommes de notre époque, dont les travaux ont le plus puissamment contribué à l'avancement et à l'enseignement des mathématiques. Tous ses travaux portent le cachet de l'élégance et de la profondeur. Ce respectable vieillard est mort à sa campagne d'Auteuil, le 9 janvier 1833, dans sa 81me année.

Dans le discours prononcé aux funérailles de Legendre, par le célèbre Poisson, dont la science déplore encore la perte (*), on remarque ce passage : « M. Legendre a eu cela de commun avec la plupart des géomètres qui l'ont précédé, que ses travaux n'ont fini qu'avec sa vie. Le dernier volume de nos mémoires (de l'Institut) renferme encore un mémoire de lui, sur une question difficile de la théorie des nombres ; et peu de temps avant la maladie qui l'a conduit au tombeau, il se procura les observations les plus récentes des comètes à courtes périodes,

(*) Mort à Sceaux près de Paris, le 25 avril 1840.

dont il allait se servir pour appliquer et perfectionner ses méthodes. C'est une chose bien digne de remarque et aussi bien consolante, de voir que quand les forces physiques nous abandonnent, les forces intellectuelles conservent encore toute la vigueur nécessaire pour s'occuper de spéculations difficiles. L'histoire des sciences en offrait déjà plusieurs exemples : dans un âge presqu'égal à celui que M. Legendre a atteint, Lagrange est mort en publiant une seconde édition de la *Mécanique analytique*, double de la première ; Laplace en achevant le cinquième volume de la *Mécanique céleste;* et Euler, à la fin d'un calcul sur la force ascensionnelle des ballons, qui occupait alors le public et les savants. »

Un *Mémoire sur les travaux et les écrits de Legendre,* a paru dans la *Bibliothèque universelle de Genève,* en 1833.

TABLEAU

des principales notations employées dans cet ouvrage, avec celles de Legendre en regard.

FONCTIONS.	NOTATION DE LEGENDRE.	NOTATION NOUVELLE.
$\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}$.	Δ, $\Delta(\varphi)$, $\Delta(c,\varphi)$.	la même.
$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}$.	$F(\varphi)$, $F(c,\varphi)$.	dig.φ, dig.(c,φ).
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}$.	F^1, $F^1(c)$.	D, D(c).
$\int\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}\,d\varphi$.	$E(\varphi)$, $E(c,\varphi)$.	eps.φ, eps.(c,φ).
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}\,d\varphi$.	E^1, $E^1(c)$.	E, E(c).
$\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}$.	$\Pi(\varphi)$, $\Pi(n,c,\varphi)$.	kap.φ, kap.(n,c,φ).
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}$.	Π^1, $\Pi^1(n,c)$.	K, K(n,c).
$\int\frac{d\varphi}{[\cos^2\varphi+(1-c^2)\sin^2\lambda\sin^2\varphi]\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$.	$\Pi(-1+b^2\sin.^2\lambda,c,\varphi)$.	kac.(λ,c,φ).
$\int\frac{d\varphi}{(1-c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}$.	$\Pi(-c^2\sin.^2\lambda,c,\varphi)$.	kal.(λ,c,φ).

TABLEAU

de quelques quadratures.

Parag.

$$\int \frac{A+B\sin.^2\varphi}{1+n\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{B}{n}\text{dig.}\varphi+\frac{An-B}{n}\text{kap.}\varphi. \quad \ldots\ldots \quad 8.$$

$$\int \frac{dp}{1-c^2p^2}=\frac{1}{2c}\log.\left(\pm\frac{1+cp}{1-cp}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10.$$

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\sin.^2\varphi}=\text{dig.}\varphi-\text{eps.}\varphi-\Delta\cot.\varphi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11.$$

$$\int \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\frac{d\varphi}{\Delta}=2\Delta\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi+\text{dig.}\varphi-2\,\text{eps.}\varphi \quad \ldots\ldots \quad 11.$$

$$\int \frac{\cos.\varphi}{m+\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=-\frac{1}{\sqrt{m+m^2c^2}}\,\text{arc tang.}\left(\frac{m\Delta}{\sqrt{m+m^2c^2}\sin.\varphi}\right). \quad 11.$$

$$\int \frac{\sin.^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{c^2}(\text{dig.}\varphi-\text{eps.}\varphi). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14.$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi}=\log.\,\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\varphi). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19.$$

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{d\varphi}{\Delta\cos.^2\varphi}&=\text{dig.}\varphi-\frac{1}{b^2}\text{eps.}\varphi+\frac{1}{b^2}\Delta\,\text{tang.}\varphi.\\ \int \frac{d\varphi}{\Delta^3}&=\frac{1}{b^2}\text{eps.}\varphi-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 43.$$

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

De l'intégrale $\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$.

§ 1. Dans l'introduction qui précède son *Traité des fonctions elliptiques*, Legendre fait observer que si l'on pouvait ranger dans un ordre méthodique les diverses transcendantes qui n'ont été connues et employées que sous le nom de *quadratures;* si, en étudiant leurs propriétés, on trouvait les moyens de les réduire aux expressions les plus simples dont elles sont susceptibles dans l'état de généralité, et d'en calculer avec facilité les valeurs approchées quand elles deviennent entièrement déterminées; alors les transcendantes dont il s'agit, désignées chacune par un caractère particulier, pourraient être employées dans l'analyse à peu près comme le sont les arcs de cercle et les logarithmes.

Ce qu'il est, pour ainsi dire, impossible d'exécuter sur un plan aussi vaste que celui qui vient d'être tracé, Legendre l'a réalisé à l'égard des transcendantes qui se rapprochent le plus des fonctions circulaires et logarithmiques, telles que les arcs d'ellipse et en général les transcendantes auxquelles il a donné le nom de *fonctions elliptiques*.

Ces fonctions, comme on le verra dans la suite, dérivent toutes de la formule

$$\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}},$$

dans laquelle P désigne une fonction rationnelle de x. Nous allons emprunter à M. Lacroix (*) l'exposé des transformations algébriques dont elle est susceptible.

Toute différentielle $X dx$ dans laquelle X est une fonction rationnelle de x et de

$$\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4},$$

radical que nous désignerons par R, pourra toujours se ramener à dépendre de $P \frac{dx}{R}$; car il est évident que X ne pourra avoir que la forme $\frac{A + BR}{C + DR}$, A, B, C et D étant des fonctions rationnelles de x; or, en multipliant les deux termes de cette fraction par $C - DR$, il viendra

$$\frac{AC - BDR^2 - (AD - CB)R}{C^2 - D^2R^2} = \frac{AC - BDR^2}{C^2 - D^2R^2} - \frac{(AD - CB)R}{C^2 - D^2R^2}.$$

La première partie de ce résultat est rationnelle; si l'on multiplie par R les deux termes de la seconde, elle se changera en

$$\frac{(AD - CB)R^2}{C^2 - D^2R^2} \cdot \frac{1}{R}$$

et faisant

$$\frac{AC - BDR^2}{C^2 - D^2R^2} = N, \quad \frac{(AD - CB)R^2}{C^2 - D^2R^2} = P,$$

(*) *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, tome II, page 48.

on trouvera

$$\frac{(A + BR)dx}{C + DR} = Ndx - \frac{Pdx}{R}.$$

Je vais montrer maintenant que, quelle que soit la fonction rationnelle P, la différentielle $\frac{Pdx}{R}$ peut être ramenée à d'autres plus simples. En substituant d'abord $\frac{p + q\gamma}{1 + \gamma}$ à la place de x dans la quantité soumise au radical et réduisant tous ses termes au même dénominateur, elle deviendra de la forme

$$\frac{\alpha' + \beta' y + \gamma' y^2 + \delta' y^3 + \varepsilon' y^4}{(1 + y)^4};$$

on pourra par conséquent faire sortir du radical le dénominateur. En égalant à zéro les coefficients β' et δ', l'intégrale proposée se réduira à

$$\frac{P'dy}{\sqrt{\alpha' + \gamma' y^2 + \varepsilon' y^4}},$$

P′ étant une fonction rationnelle de y: p et q seront déterminés par les équations $\beta' = o$, $\delta' = o$, mais il est essentiel de s'assurer que ces quantités auront toujours des valeurs réelles.

Pour y parvenir, mettons

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

sous la forme

$$\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{\beta}{\varepsilon} x + \frac{\gamma}{\varepsilon} x^2 + \frac{\delta}{\varepsilon} x^3 + x^4\right) \varepsilon,$$

et concevons que la quantité renfermée entre les parenthèses, soit décomposée en facteurs réels du second degré $x^2 - fx + g$, $x^2 - f'x + g'$, ce qui est toujours possible ; il suffira alors de faire dans chacun de ces facteurs la substitution indiquée, et d'égaler à zéro les termes affectés de la première puissance de y: on négligera le dénominateur commun, puisqu'il sort du radical. Ce calcul étant effectué, il en résultera les équations

$$2pq - f(p + q) + 2g = o, \quad 2pq - f'(p + q) + 2g' = o,$$

lesquelles donneront sous une forme rationnelle, les valeurs de $p+q$ et de pq; or, il suit de la théorie des équations que p et q seront les racines d'une équation du second degré de la forme $u^2-(p+q)u+pq=o$, et seront réelles si $\frac{1}{4}(p+q)^2$ surpasse pq, ou si $\frac{1}{4}(p+q)^2-pq$ est une quantité positive.

Voyons maintenant si cette condition est toujours remplie : soient a, b, c, d les quatre racines de l'équation

$$x^4+\frac{\delta}{\varepsilon}x^3+\frac{\gamma}{\varepsilon}x^2+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\alpha}{\varepsilon}=o,$$

il est évident qu'on aura

$$f=a+b,\quad g=ab,\quad f'=c+d,\quad g'=cd,$$

et les équations

$$2pq-f(p+q)+2g=o \text{ et } 2pq-f'(p+q)+2g'=o$$

deviendront

$$2pq-(a+b)(p+q)+2ab=o,\quad 2pq-(c+d)(p+q)+2cd=o:$$

tirant de ces dernières les valeurs de $p+q$ et de pq, on aura

$$p+q=\frac{2(ab-cd)}{a+b-c-d},\quad pq=\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{a+b-c-d};$$

formant, au moyen de ces expressions, celle de $\frac{1}{4}(p+q)^2-pq$, quantité qui revient à $\frac{1}{4}(p-q)^2$, et décomposant en facteurs le résultat qu'on aura obtenu, on trouvera

$$\frac{1}{4}(p-q)^2=\frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}.$$

Lorsque les quatre racines a, b, c et d seront réelles, on pourra les disposer dans l'ordre de leurs grandeurs respectives, en plaçant les négatives après les positives; dans ce cas, les différences $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$ seront toutes positives, $(p-q)^2$ sera donc positif, p et q seront donc réels.

Si deux racines a, b sont imaginaires, elles seront nécessairement de la forme $m+n\sqrt{-1}$, $m-n\sqrt{-1}$ et elles pourront toujours

être comprises dans le même facteur du second degré : posons donc

$$a = m + n\sqrt{-1},\ b = m - n\sqrt{-1};$$

il en résultera

$$ab = m^2 + n^2,\ a + b - c - d = 2m - c - d;$$

ainsi les quantités $p + q$ et pq seront réelles. On aura de plus

$$a - c = m + n\sqrt{-1} - c,\quad a - d = m + n\sqrt{-1} - d,$$

$$b - c = m - n\sqrt{-1} - c,\quad b - d = m - n\sqrt{-1} - d,$$

d'où

$$(a-c)(b-c) = m^2 - 2cm + c^2 + n^2 = (m-c)^2 + n^2,$$

$$(a-d)(b-d) = m^2 - 2dm + d^2 + n^2 = (m-d)^2 + n^2,$$

quantités essentiellement positives.

Enfin, si l'on a à la fois

$$a = m + n\sqrt{-1},\quad b = m - n\sqrt{-1},$$

$$c = m' + n'\sqrt{-1},\quad d = m' - n'\sqrt{-1},$$

on développera les produits

$$(a-c)(b-d) =$$

$$(m + n\sqrt{-1} - m' - n'\sqrt{-1})(m - n\sqrt{-1} - m' + n'\sqrt{-1}),$$

$$(a-d)(b-c) =$$

$$(m + n\sqrt{-1} - m' + n'\sqrt{-1})(m - n\sqrt{-1} - m' - n'\sqrt{-1}),$$

les imaginaires disparaîtront, et il viendra

$$m^2 + n^2 - 2mm' - 2nn' + m'^2 + n'^2 = (m - m')^2 + (n - n')^2,$$

$$m^2 + n^2 - 2mm' + 2nn' + m'^2 + n'^2 = (m - m')^2 + (n + n')^2,$$

résultats nécessairement positifs.

Si les racines c et d étaient respectivement égales aux racines a et b, les valeurs précédentes de $p + q$ et de $p - q$ deviendraient $\frac{0}{0}$; mais, dans ce cas, on aurait

$$x^4 + \frac{\delta}{\varepsilon}x^3 + \frac{\gamma}{\varepsilon}x^2 + \frac{\beta}{\varepsilon}x + \frac{\alpha}{\varepsilon} = (x-a)^2(x-b)^2,$$

et le radical disparaîtrait.

Lorsque l'une des racines a ou b sera égale à l'une des racines c ou d, il en résultera $p - q = o$: dans cette circonstance, on peut, en combinant ensemble les deux racines égales, en former un facteur carré qui sortira du radical. Soit, par exemple, $a = c$, il vient $(x - a)^2 (x^2 + hx + k)$ au lieu de $x^4 + \frac{\delta}{\varepsilon} x^3 +$ etc., et l'intégrale proposée se change en

$$\int \frac{P dx}{(x-a)\sqrt{x^2 + hx + k)}},$$

qui ne dépend que des arcs de cercle et des logarithmes.

Enfin si l'on avait $a + b = c + d$, les quantités $p + q$ et $p - q$ deviendraient infinies ; mais on aurait en même temps $f = f'$, ce qui changerait les deux facteurs du second degré de $x^4 + \frac{\delta}{\varepsilon} x^3 +$ etc., en $x^2 - fx + g$ et $x^2 - fx + g'$: la simple supposition de $x = y + \frac{f}{2}$, ferait disparaître le second terme de l'un et de l'autre.

Nous voilà donc convaincus que la transformation proposée ci-dessus conduira toujours à une expression réelle, et qu'on pourra changer R en

$$\frac{1}{(1+y)^2}\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4},$$

par la substitution de $\frac{p+qy}{1+y}$ au lieu de x; mais cette substitution donne aussi

$$dx = \frac{(1+y)q dy - (p+qy)\, dy}{(1+y)^2},$$

et désignant par P′ ce que devient alors la fonction P, on aura

$$\int \frac{P dx}{R} = \int \frac{P'(q-p)\, dy}{\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4}} :$$

l'intégration de $\int \frac{P dx}{R}$ sera donc ramenée à celle de

$$\int \frac{Q dy}{\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4}},$$

Q étant une fonction rationnelle de y.

§ 2. Je vais montrer qu'on peut réduire cette fonction à ne renfermer que des puissances paires de y. En la supposant fractionnaire, on lui donnera la forme $\frac{S+Ty}{U+Vy}$, les lettres S, T, U, V représentant des fonctions de y^2, et si on multiplie les deux termes de cette fraction par $U-Vy$, il viendra

$$\frac{US - VTy^2 + (UT - VS)\,y}{U^2 - V^2y^2};$$

posant

$$\frac{US - VTy^2}{U^2 - V^2y^2} = G, \quad \frac{UT - VS}{U^2 - V^2y^2} = H,$$

G et H seront encore des fonctions de y^2, et la fonction Q étant transformée en $G + Hy$, la différentielle

$$\frac{Qdx}{\sqrt{\alpha' + \beta'y^2 + \gamma'y^4}}$$

deviendra

$$\frac{Gdy}{\sqrt{\alpha' + \beta'y^2 + \gamma'y^4}} + \frac{Hydy}{\sqrt{\alpha' + \beta'y^2 + \gamma'y^4}}.$$

Faisant $y^2 = z$ dans la seconde partie, elle se changera en

$$\frac{Hdz}{2\sqrt{\alpha' + \beta'z + \gamma'z^2}},$$

H étant une fonction rationnelle de z, et sera rendue rationnelle par les méthodes connues; alors il ne restera plus à traiter que

$$\frac{Gdy}{\sqrt{\alpha' + \beta'y^2 + \gamma'y^4}}.$$

Nous nous occuperons donc désormais de la seule intégrale

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}},$$

dans laquelle P ne contient que des puissances paires de x, et nous ferons pour abréger

$$\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4} = R.$$

En décomposant le polynome

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{\beta}{\varepsilon}x + \frac{\gamma}{\varepsilon}x^2 + \frac{\delta}{\varepsilon}x^3 + x^4,$$

en deux facteurs de la forme $x^2 - fx + g$, $x^2 - f'x + g'$, nous avons supposé implicitement que le coefficient de x^4 était positif. Si au lieu de $+\varepsilon x^4$ on avait $-\varepsilon x^4$ sous le radical, on poserait

$$\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 - \varepsilon x^4} = \sqrt{-1}.\ \sqrt{\varepsilon x^4 - \delta x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha},$$

et toute la discussion précédente resterait la même : seulement le radical du second degré en y,

$$\sqrt{\alpha' + \beta' y^2 + \gamma' y^4},$$

devrait être multiplié par $\sqrt{-1}$. Quant à la réalité ou à l'imaginarité de ce radical, elle dépendra des signes des coefficients α' β' γ' et des relations de ces coefficients entre eux. Pour traiter la question dans toute sa généralité, il faut donc supposer le double signe à ces coefficients.

§ 3. Si la fonction P est entière, elle ne pourra avoir que la forme $A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \text{etc.}$, puisqu'elle ne doit contenir que des puissances paires de x : dans ce cas

$$\int \frac{P dx}{R} \text{ deviendra } A\int \frac{dx}{R} + B\int \frac{x^2 dx}{R} + \text{etc.};$$

mais

$$\int \frac{x^{2m} dx}{R} \text{ se ramène à } \int \frac{x^{2m-2} dx}{R} \text{ et à } \int \frac{x^{2m-4} dx}{R},$$

comme nous allons le prouver en différentiant la quantité Rx^{2m-3}; ce qui donne

$$(2m-3)\, x^{2m-4} dx \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4} + \frac{x^{2m-3}(\beta x + 2\gamma x^3) dx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}}:$$

réduisant au même dénominateur, prenant séparément l'intégrale de chaque terme et remettant R au lieu de

$$\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4},$$

il viendra

$$Rx^{2m-3} = (2m-3)\alpha\int\frac{x^{2m-4}dx}{R} + (2m-2)\beta\int\frac{x^{2m-2}dx}{R}$$
$$+ (2m-1)\gamma\int\frac{x^{2m}dx}{R}.$$

Par le moyen de cette équation, on ramènera tous les cas de l'expression $\int\frac{x^{2m}dx}{R}$ aux deux suivants

$$\int\frac{x^0dx}{R} = \int\frac{dx}{R}, \int\frac{x^2dx}{R},$$

et l'on voit par là que P étant une fonction rationnelle et entière, $\int\frac{Pdx}{R}$ renfermera deux parties, l'une intégrée, et l'autre de la forme $\int(A + Bx^2)\frac{dx}{R}$.

§ 4. Passons au cas où P est une fonction rationnelle quelconque. Après en avoir extrait la partie entière qu'on traitera comme il vient d'être dit, on fera $x^2 = u$, et on décomposera la fraction restante en fractions partielles de la forme $\frac{N}{(u+a)^n}$, ou $\frac{N}{(x^2+a)^n}$, N et a étant des quantités réelles ou imaginaires, et il viendra à intégrer une suite de termes, tels que $N\int\frac{dx}{(x^2+a)^n R}$ qu'il faudra tâcher de réduire à d'autres dans lesquels l'exposant de $x^2 + a$ soit le moindre possible.

Pour suivre la même marche que dans le paragraphe précédent, nous chercherons une fonction qui, étant différentiée, puisse donner une suite de termes de la forme

$$\frac{Adx}{(x^2+a)^n R} + \frac{Bdx}{(x^2+a)^{n-1}R} + \frac{Cdx}{(x^2+a)^{n-2}R} + \text{etc.}$$

Or, en réduisant ces termes au même dénominateur, la fonction qu'on trouvera par la réunion de tous les numérateurs ne contiendra que des puissances paires de x, et avec un peu d'habitude de la différentiation, on verra que la différentielle de $\frac{xR}{(x^2+a)^{n-1}}$ satisfait à cette condition. On trouve pour cette différentielle

$$\frac{(x^2+a)(xdR + Rdx) - 2(n-1)x^2Rdx}{(x^2+a)^n};$$

mettant pour R et dR leurs valeurs, et réduisant tous les termes au même dénominateur, l'expression précédente deviendra

$$\frac{dx}{\mathrm{R}}\left[\frac{-(2n-5)\gamma x^6-[(2n-4)\beta-3a\gamma]x^4-[(2n-3)\alpha-2a\beta]x^2+a\alpha}{(x^2+a)^n}\right];$$

faisant $x^2+a=z$, nous aurons $x^2=z-a$, et substituant dans la quantité qui multiplie $\frac{dx}{\mathrm{R}}$, on pourra lui donner la forme

$$\frac{\mathrm{A}z^3+\mathrm{B}z^2+\mathrm{C}z+\mathrm{D}}{z^n}=\frac{\mathrm{A}}{z^{n-3}}+\frac{\mathrm{B}}{z^{n-2}}+\frac{\mathrm{C}}{z^{n-1}}+\frac{\mathrm{D}}{z^n}.$$

En effectuant avec attention les calculs indiqués, remettant pour z sa valeur, multipliant le résultat par $\frac{dx}{\mathrm{R}}$, et prenant l'intégrale de chaque terme, on trouvera

$$(a)\ \ldots\left\{\begin{aligned}\frac{x\mathrm{R}}{(x^2+a)^{n-1}}=&-(2n-5)\gamma\int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-3}\mathrm{R}}\\&-(2n-4)(\beta-3a\gamma)\int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-2}\mathrm{R}}\\&-(2n-3)(3a^2\gamma-2a\beta+\alpha)\int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}\mathrm{R}}\\&+(2n-2)(a^3\gamma-a^2\beta+a\alpha)\int\frac{dx}{(x^2+a)^n\mathrm{R}}\end{aligned}\right.$$

d'où il suit qu'on pourra exprimer $\int\frac{dx}{(x^2+a)^n\mathrm{R}}$ par des intégrales de plus en plus simples, tant que n surpassera l'unité. Lorsqu'on sera parvenu à $\int\frac{dx}{(x^2+a)^2\mathrm{R}}$, on aura $n=2, 2n-4=0$, et l'intégrale proposée dépendra de

$$\int\frac{dx}{(x^2+a)\mathrm{R}}\ \text{et de}\int\frac{dx}{(x^2+a)^{-1}\mathrm{R}}=\int(x^2+a)\frac{dx}{\mathrm{R}}.$$

Quand x^2+a sera un diviseur de la quantité $\alpha+\beta x^2+\gamma x^4$, il faudra que le reste $\alpha-\beta a+\gamma a^2$ de la division de ce trinome par x^2+a soit nul de lui-même. Or, ce reste étant précisément un des coefficients de la dernière intégrale dans (a), si l'on écrit $n+1$

au lieu de n, on aura par ce moyen

$$\int\frac{dx}{(x^2+a)^n\mathrm{R}} \text{ en } \int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}\mathrm{R}} \text{ et } \int\frac{dx}{(x^2+a)^{n-2}\mathrm{R}},$$

et l'on pourra pousser les réductions successives jusqu'à ce qu'on soit arrivé à $\int\frac{dx}{(x^2+a)\mathrm{R}}$, qui se trouvera exprimé par

$$\int\frac{dx}{\mathrm{R}} \text{ et } \int(x^2+a)\frac{dx}{\mathrm{R}}.$$

§ 5. En rapprochant ces résultats de ceux du paragraphe précédent, il sera prouvé que, quelle que soit la fonction P, l'intégration de

$$\frac{\mathrm{P}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}},$$

peut être ramenée à celle de

$$\mathrm{A}\int\frac{dx}{(x^2+a)\mathrm{R}}+\mathrm{B}\int\frac{dx}{\mathrm{R}}+\mathrm{C}\int\frac{x^2dx}{\mathrm{R}}.$$

Si l'on avait des moyens pour obtenir ces dernières intégrales, au moins par approximation, comme on en a pour calculer les logarithmes et les arcs de cercle, on pourrait regarder comme intégrées toutes les expressions qui s'y ramèneraient, de même qu'on regarde comme intégrées toutes celles qui conduisent à des logarithmes et à des arcs de cercle.

Les intégrales

$$\int\frac{dx}{\mathrm{R}},\ \int\frac{x^2dx}{\mathrm{R}},\ \int\frac{dx}{(x^2+a)\mathrm{R}},$$

sont donc de nouvelles fonctions transcendantes qu'il faut introduire dans le calcul. Mais nous allons bientôt ramener ces transcendantes à d'autres plus faciles à calculer et dont on peut donner une interprétation géométrique.

CHAPITRE II.

Réduction de la différentielle $\frac{Pdx}{R}$ *aux fonctions elliptiques. — Classification de ces fonctions. — Réduction de la différentielle* $\frac{Qd\varphi}{\Delta}$.

---

§ 6. Puisque, par une première préparation, on peut faire en sorte qu'il n'y ait pas de puissances impaires de la variable sous le radical, nous ferons toujours

$$R = \sqrt{\alpha' + \beta' x^2 + \gamma' x^4},$$

ce qui peut se réduire encore à la forme

$$R = \sqrt{1 + \beta x^2 + \gamma x^4},$$

en observant que

$$\sqrt{\alpha' + \beta' x^2 + \gamma' x^4} = \sqrt{\alpha'} \sqrt{1 + \frac{\beta'}{\alpha'} x^2 + \frac{\gamma'}{\alpha'} x^4}.$$

Cela posé, nous allons prouver d'abord par l'énumération des différents cas, que *la différentielle*

$$\frac{dx}{R} = \frac{dx}{\sqrt{1 + \beta x^2 + \gamma x^4}}$$

peut toujours se ramener à la forme

$$\frac{m d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}},$$

où l'on a c *plus petit que l'unité.*

Nous poserons en général

$$\pm 1 \pm \beta x^2 \pm \gamma x^4 = (\pm 1 \pm p^2 x^2)\ (\pm 1 \pm q^2 x^2),$$

p étant toujours censé plus grand que q.

Toutes les combinaisons de signe de 1, β et γ sont au nombre de huit

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ldots. & 1+\beta x^2+\gamma x^4=(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)= \quad 1+(p^2+q^2)x^2+p^2q^2x^4, \\
(2)\ldots. & 1+\beta x^2-\gamma x^4=(1+p^2x^2)(1-q^2x^2)= \quad 1+(p^2-q^2)x^2-p^2q^2x^4, \\
(3)\ldots. & 1-\beta x^2+\gamma x^4=(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)= \quad 1-(p^2+q^2)x^2+p^2q^2x^4, \\
(4)\ldots. & 1-\beta x^2-\gamma x^4=(1-p^2x^2)(1+q^2x^2)= \quad 1-(p^2-q^2)x^2-p^2q^2x^4, \\
(5). & -1+\beta x^2+\gamma x^4=(1+q^2x^2)(p^2x^2-1)=-1+(p^2-q^2)x^2+p^2q^2x^4, \\
(6). & -1+\beta x^2-\gamma x^4=(1-q^2x^2)(p^2x^2-1)=-1+(p^2+q^2)x^2-p^2q^2x^4, \\
(7). & -1-\beta x^2+\gamma x^4=(1+p^2x^2)(q^2x^2-1)=-1-(p^2-q^2)x^2+p^2q^2x^4, \\
(8). & -1-\beta x^2-\gamma x^4=(-1)(1+\beta x^2+\gamma x^4).
\end{array}
$$

Nous ferons abstraction de la dernière combinaison qui suppose le radical essentiellement imaginaire et qui rentre du reste dans la première.

Voyons dans quels cas ces équations hypothétiques donnent pour p et q des valeurs réelles.

Les combinaisons (2), (4), (5) et (7) donnent pour déterminer p et q les équations de condition

$$p^2-q^2=\beta, \quad p^2q^2=\gamma,$$

d'où

$$p^2=\tfrac{1}{2}\beta+\sqrt{\tfrac{1}{4}\beta^2+\gamma}, \quad q^2=-\tfrac{1}{2}\beta+\sqrt{\tfrac{1}{4}\beta^2+\gamma},$$

Ainsi p et q sont essentiellement réels, si l'on donne au radical $\sqrt{\tfrac{1}{4}\beta^2+\gamma}$ le signe $+$.

Les combinaisons (1), (3) et (6) donnent lieu aux équations

$$p^2+q^2=\beta, \quad p^2q^2=\gamma,$$

d'où

$$p^2=\tfrac{1}{2}(\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}), \quad q^2=\tfrac{1}{2}(\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma});$$

il s'ensuit que, pour la réalité de p et de q, on doit avoir $\beta^2-4\gamma>o$: chacune de ces combinaisons offre donc deux cas différents

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1') \ldots\ldots & 1+\beta x^2+\gamma x^4 \\
(3') \ldots\ldots & 1-\beta x^2+\gamma x^4 \\
(6') \ldots\ldots & -1+\beta x^2-\gamma x^4
\end{array}\right\} \text{avec } \beta^2-4\gamma>o,
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
(1'') \ldots\ldots & 1+\beta x^2+\gamma x^4 \\
(3'') \ldots\ldots & 1-\beta x^2+\gamma x^4 \\
(6'') \ldots\ldots & -1+\beta x^2-\gamma x^4
\end{array}\right\} \text{avec } \beta^2-4\gamma<o.
$$

Transformation de (2) *et de* (4). — La limite de x dans (2) étant $\frac{1}{q}$, on fera

$$x = \frac{1}{q} \cos. \varphi \text{ et } \frac{p^2}{p^2+q^2} = c^2,$$

ce qui donnera

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{p} \cdot \frac{-d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \phi}}.$$

La combinaison (4) se ramène à la précédente en changeant simultanément p en q et q en p dans chacun de ses facteurs. Sa transformée sera donc la même, *mutatis mutandis.*

Transformation de (5) *et de* (7). — On fait

$$x = \frac{1}{p \cos. \varphi}, \quad c^2 = \frac{p^2}{p^2+q^2},$$

et l'on a

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{p} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}}.$$

La combinaison (7) se déduit de (5) en changeant p en q et q en p. On posera donc

$$x = \frac{1}{q \cos. \varphi}, \quad c^2 = \frac{q^2}{p^2+q^2},$$

et la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{q} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}}.$$

Transformation de (1′). — En posant

$$x = \frac{1}{p} \text{tang. } \varphi, \quad \frac{p^2-q^2}{p^2} = c^2,$$

il vient

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{p} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}}.$$

Discussion et transformation de (3′). — Pour que le radical R soit réel, on doit avoir simultanément

$$1-p^2x^2 > o, \quad 1-q^2x^2 > o; \quad \text{ou } 1-p^2x^2 < o, \quad 1-q^2x^2 < o:$$

c'est-à-dire

$$x < \frac{1}{p}, \; x < \frac{1}{q}; \quad \text{ou } x > \frac{1}{p}, \; x > \frac{1}{q}.$$

Puisque p est par hypothèse plus grand que q, ces quatre inégalités se réduisent à

$$x < \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad x > \frac{1}{q}.$$

La formule

$$(3') = (1 - p^2x^2)\,(1 - q^2x^2),$$

servira donc depuis $x = o$, jusqu'à $x = \frac{1}{p}$, et

$$(3') = (p^2x^2 - 1)\,(q^2x^2 - 1),$$

depuis $x = \frac{1}{q}$ jusqu'à $x = \infty$. Dans le premier cas on fera

$$x = \frac{1}{p} \sin.\, \varphi, \quad \frac{q}{p} = c,$$

et l'on aura

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{p} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}};$$

dans le second, on posera

$$x = \frac{1}{q \sin.\, \varphi}, \quad \frac{q}{p} = c,$$

et la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{-d\varphi}{p\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}},$$

la même, au signe près, que la précédente.

Discussion et transformation de (6'). — Le radical sera réel si l'on a simultanément

$$1 - q^2x^2 > o, \quad p^2x^2 - 1 > o, \quad \text{ou} \quad 1 - q^2x^2 < o, \quad p^2x^2 - 1 < o,$$

c'est-à-dire

$$x < \frac{1}{q}, \; x > \frac{1}{p}, \quad \text{ou} \quad x > \frac{1}{q}, \; x < \frac{1}{p}.$$

Or, la seconde hypothèse

$$x > \frac{1}{q}, \quad x < \frac{1}{p},$$

est visiblement absurde, puisque q étant moindre que p, si x surpasse $\frac{1}{q}$, il surpasse *a fortiori* $\frac{1}{p}$. Soit donc fait

$$c^2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2}, \quad \text{et } x^2 = \frac{1}{p^2(1 - c^2 \sin.^2 \varphi)},$$

on aura la transformée

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{p} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}}.$$

Discussion et transformation de (1″) et de (3″). — Les quantités p^2 et q^2 étant imaginaires, les méthodes précédentes deviennent inapplicables.

On traitera les deux combinaisons simultanément en posant

$$1 \pm \beta x^2 + \gamma x^4 = 1 + 2\mu x^2 \cos. \theta + \mu^2 x^4,$$

ce qui donnera

$$\mu = \sqrt{\gamma} \quad \text{et} \quad \cos. \theta = \pm \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}.$$

On fera

$$x = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \cdot \text{tang.} \tfrac{1}{2} \varphi,$$

et prenant $c = \sin. \frac{1}{2} \theta$, on aura la transformée

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}}.$$

Discussion de (6″). — Le radical

$$\sqrt{-1 + \beta x^2 - \gamma x^4},$$

pouvant s'écrire sous la forme

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 - \beta x^2 + \gamma x^4},$$

la transformée de (6″) sera celle de (3″) multipliée par $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, et par conséquent imaginaire de sa nature.

On pourrait démontrer *a priori* que le radical est essentiellement imaginaire, en posant $\beta^2 = 4\gamma \cos.^4\theta$; d'où

$$R = \sqrt{-1 + 2\sqrt{\gamma}\cos.^2\theta.\, x^2 - \gamma x^4},$$

valeur dont la réalité dépendra de l'équation de condition

$$2\sqrt{\gamma}\cos.^2\theta.x^2 > 1 + \gamma x^4, \text{ ou}$$

$$1 - 2\sqrt{\gamma}\cos.^2\theta.x^2 + \gamma x^4 + A^2 = o$$

$$= (1 - x^2\sqrt{\gamma})^2 + 2x^2\sqrt{\gamma}\sin.^2\theta + A^2.$$

Cette dernière équation étant une somme de carrés, il est impossible d'y satisfaire par des valeurs réelles de la variable.

On peut remarquer maintenant que les valeurs de x^2, qui opèrent la réduction de la transcendante $\int\frac{dx}{R}$, sont au nombre de sept, savoir

$$x^2 = \frac{1}{q^2}\cos.^2\varphi, \quad x^2 = \frac{1}{p^2\cos.^2\varphi}, \quad x^2 = \frac{\sin.^2\varphi}{p^2\cos.^2\varphi},$$

$$x^2 = \frac{1}{p^2}\sin.^2\varphi, \quad x^2 = \frac{1}{q^2\sin.^2\varphi}, \quad x^2 = \frac{1}{p^2 - p^2c^2\sin.^2\varphi},$$

$$x^2 = \frac{1}{\mu}\tang.^2\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Les six premières sont comprises dans la formule générale

$$x^2 = \frac{A + B\sin.^2\varphi}{C + D\sin.^2\varphi},$$

en assignant des valeurs convenables aux coefficients constants A, B, C et D.

§ 7. Pour opérer la transformation des deux autres transcendantes

$$\int\frac{x^2dx}{R}, \quad \int\frac{dx}{(x^2 + a)R},$$

nous substituerons dans ces fonctions, au lieu de x^2 les valeurs générales

$$x^2 = \frac{A + B\sin.^2\varphi}{C + D\sin.^2\varphi} \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{1}{\mu}\tang.^2\tfrac{1}{2}\varphi;$$

ce qui donnera pour résultat les trois transcendantes

$$M\int\frac{A+B\sin.^2\varphi}{C+D\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},$$

$$M'\int\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},\ M''\int\frac{1}{a\mu+\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},$$

M, M′, M″ étant des coefficients constants.

Le résultat de la substitution de la valeur

$$x^2=\frac{A+B\sin.^2\varphi}{C+D\sin.^2\varphi}\quad\text{dans}\int\frac{dx}{(x^2+a)R},$$

étant

$$M'''\int\frac{C+D\sin.^2\varphi}{(A+aC)+(B+aD)\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},$$

il est inutile de s'en occuper, puisque cette forme rentre dans le type

$$M\int\frac{A+B\sin.^2\varphi}{C+D\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}.$$

Nous essaierons tout à l'heure de ramener à un même type les trois transcendantes nouvelles que nous venons d'obtenir.

§ 8. Ce type est la formule générale

$$H=\int\frac{A+B\sin.^2\varphi}{1+n\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},$$

qui renferme les trois indéterminées A, B et n.

Les transcendantes qui s'y trouvent comprises portent le nom de *fonctions elliptiques*. Nous verrons au § 29 l'origine de cette dénomination.

Elles peuvent toutes s'exprimer par les trois intégrales

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},\ \int d\varphi\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}.$$

En effet, pour $n = o$, on a

$$H = \int (A + B \sin.^2\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}}$$

$$= \left(A + \frac{B}{c^2}\right) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}} - \frac{B}{c^2} \int d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi};$$

et, quand n n'est pas nul,

$$(a) \ldots\ldots H = \frac{B}{n} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}}$$

$$+ \frac{An - B}{n} \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi) \sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}}.$$

De là, la division des fonctions elliptiques en trois espèces distinctes, représentées par les trois intégrales précédentes.

Nous dénoterons dorénavant le radical $\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}$ par Δ et aussi par $\Delta(\varphi)$ et $\Delta(c, \varphi)$ lorsqu'on le regardera comme fonction de φ ou de c et de φ. Ce radical est toujours positif, car il ne devient jamais nul ou infini, et pour qu'une quantité positive quelconque devienne négative, on sait qu'elle doit passer par zéro ou par l'infini.

La transcendante H étant une fonction de φ, son étendue dépend de cette variable qu'on appelle *l'amplitude :* la constante c, toujours plus petite que l'unité, s'appelle le *module* (*).

On pourra représenter c par sin. θ, et θ sera dit *l'angle du module*. En même temps $\sqrt{1 - c^2}$, que nous désignerons constamment par b, pourra s'appeler le *complément du module*.

La constante n qui n'entre que dans les fonctions de troisième espèce, et qui peut être positive ou négative, réelle ou imaginaire, se nommera le *paramètre*.

(*) Ce mot désigne aussi le coefficient constant au moyen duquel on passe d'un système de logarithmes à un autre. Pour éviter toute équivoque, nous ne l'emploierons jamais dans cette dernière acception, sans en avertir expressément.

Lorsque ce paramètre sera exprimé au moyen d'un angle, comme lorsqu'on pose $n = c \sin.\lambda$, $n = -c^2 \sin.^2\lambda$, etc., cet angle sera dit l'*angle du paramètre*.

Nous appellerons *digamma*, *epsilon* et *kappa* les trois espèces de fonctions elliptiques, et nous les désignerons par les notations abrégées

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}} = \int \frac{d\varphi}{\Delta(c, \varphi)},$$

$$\text{eps.}(c, \varphi) = \int d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi} = \int \Delta(c, \varphi) d\varphi,$$

$$\text{kap.}(n, c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}} = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\Delta(c, \varphi)}.$$

Dans la comparaison des fonctions elliptiques qui ne diffèrent que par quelques-uns de leurs éléments, on pourra faire abstraction des éléments communs. Ainsi, par exemple, à la place des équations

$$\text{dig.}(c, \varphi) + \text{dig.}(c, \psi) = \text{dig.}(c, \mu),$$
$$\text{kap.}(n, c, \varphi) + \text{kap.}(n, c, \psi) = \text{kap.}(n, c, \mu),$$

on pourra écrire plus simplement

$$\text{dig.}\,\varphi + \text{dig.}\,\psi = \text{dig.}\,\mu,$$
$$\text{kap.}\,\varphi + \text{kap.}\,\psi = \text{kap.}\,\mu.$$

Puisque les transcendantes elliptiques sont des fonctions de leurs amplitudes, on peut regarder à leur tour les amplitudes comme des fonctions de ces transcendantes. Ainsi, en posant dig. $(c, \varphi) = p$, on aura

$$\varphi = \text{amp.}(c, p),\ \sin.\varphi = \sin.\text{amp.}(c, p),\ \Delta(c, \varphi) = \Delta\,\text{amp.}(c, p), \text{ etc.};$$

ou simplement, quand le module est partout le même,

$$\varphi = \text{amp.}\,p, \quad \sin.\varphi = \sin.\text{amp.}\,p, \quad \Delta(\varphi) = \Delta\,\text{amp.}\,p.$$

§ 9. Les propriétés communes aux trois espèces de fonctions elliptiques sont :

1° De s'évanouir avec leur amplitude.

Pour le démontrer, nous écrirons la formule générale H sous la forme

$$H = \int (A + B \sin.^2\varphi)\ (1 + n \sin.^2\varphi)^{-1}\ (1 - c^2 \sin.^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi;$$

mais

$$(1 + n \sin.^2\varphi)^{-1} = 1 + \alpha \sin.^2\varphi + \alpha' \sin.^4\varphi + \alpha'' \sin.^6\varphi + \text{etc.},$$

$$(1 - c^2 \sin.^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \mathcal{C} \sin.^2\varphi + \mathcal{C}' \sin.^4\varphi + \mathcal{C}'' \sin.^6\varphi + \text{etc.},$$

α, α', etc., étant des fonctions entières de n, et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, etc., des fonctions entières de c^2. Faisant le produit des deux séries précédentes et de $A + B \sin.^2\varphi$, on obtiendra pour résultat une série de la forme

$$A + A' \sin.^2\varphi + A'' \sin.^4\varphi + A''' \sin.^6\varphi + \text{etc.},$$

A', A'', A''', etc., étant des fonctions de A, B, n et c^2, qui ne deviendront pas infinies tant que ces coefficients ne le seront pas eux-mêmes. Or, il est aisé de voir que si, dans la dernière série, on remplace le sinus par son développement en fonctions de l'arc, le résultat sera de la forme

$$A + A_1 \varphi^2 + A_2 \varphi^4 + A_3 \varphi^6 + \text{etc.},$$

et que l'on pourra appliquer aux coefficients A_1, A_2, A_3, etc., la remarque que nous venons de faire sur A', A'', A''', etc. En substituant au coefficient de $d\varphi$ sous le signe $\int$ le développement qui précède, l'intégration donnera pour valeur de H

$$H = A \frac{\varphi}{1} + A_1 \frac{\varphi^3}{3} + A_2 \frac{\varphi^5}{5} + A_3 \frac{\varphi^7}{7} + \text{etc.} + \text{const.}:$$

et comme le second membre de cette équation s'évanouit, à la constante près, lorsqu'on y fait $\varphi = o$, on pourra supposer cette constante nulle en attribuant à la fonction H la même origine qu'à son amplitude (*).

(*) Il n'est pas permis de supposer pour toutes les fonctions qu'elles s'évanouissent avec la variable. L'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\varphi} = \log.\varphi$, par exemple, au lieu de devenir nulle quand $\varphi = o$, prend alors une valeur infinie. On ne peut donc pas toujours prendre zéro pour valeur de la constante arbitraire.

2° De changer de signe avec leur amplitude, en conservant la même grandeur.

En effet, dans la fonction générale H, la différentielle $d\varphi$ change seule de signe quand on écrit $-\varphi$ au lieu de φ.

3° De n'avoir besoin d'être calculées que depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Pour le démontrer, soit φ un angle quelconque : on pourra poser

$$\varphi = i\pi \pm \alpha$$

i étant un nombre entier et α un angle qui n'excède pas 90°. D'où

$$d\varphi = \pm\, d\alpha, \quad \sin.\varphi = \pm \sin.\alpha \cos.i\pi,$$

et par conséquent

$$\sin.^2\varphi = \sin.^2\alpha :$$

substituant à $d\varphi$ et à $\sin.^2\varphi$ ces valeurs dans la différentielle de H, il viendra, en intégrant,

$$\mathrm{H}(\varphi) = \text{const.} \pm \mathrm{H}(\alpha).$$

Mettant au lieu de φ sa valeur $i\pi \pm \alpha$ dans cette équation, puis faisant $\alpha = o$ pour déterminer la constante, on aura

$$\mathrm{H}(i\pi \pm \alpha) = \mathrm{H}(i\pi) \pm \mathrm{H}(\alpha);$$

d'où l'on tire aisément, en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $i = 1$,

$$\mathrm{H}(\pi) = 2\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \mathrm{H}\left(3.\frac{\pi}{2}\right) = 3\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

et en général, en donnant à i et à α des valeurs convenables,

$$\mathrm{H}\left(i.\frac{\pi}{2}\right) = i\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Par conséquent, puisque

$$\mathrm{H}(i\pi) = \mathrm{H}\left(2i.\frac{\pi}{2}\right) = 2i\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

on en conclut

$$\mathrm{H}(i\pi \pm \alpha) = 2i\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \mathrm{H}(\alpha).$$

La fonction déterminée qui répond à l'amplitude $\varphi = \frac{\pi}{2}$ est donc,

en quelque sorte, la fonction devenue *complète*. Nous la désignerons par

D, ou D(c) quand nous la considèrerons comme une fonction du module c, pour les digamma ;

E ou E(c) pour les epsilon;

K ou K(n, c) pour les kappa :

de manière que nous aurons

$$D(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(c, \varphi)}, \quad E(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(c, \varphi)\, d\varphi,$$

$$K(n, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\, \Delta(c, \varphi)}.$$

On verra par la suite (§§ 16, 28 et 50) que les fonctions elliptiques peuvent être représentées par des secteurs de courbes fermées, symétriques par rapport à deux axes rectangulaires comme l'ellipse. L'amplitude, qui n'est autre chose que l'angle du secteur, se compte à partir du même axe que le secteur, et la fonction complète est le quart de l'aire totale. Les propriétés précédentes sont évidemment la traduction algébrique des propriétés géométriques de ces secteurs. Le secteur BCDF (*fig.* 1), par exemple, compté à partir du demi-axe AB, est égal à deux fois l'aire BAC plus le secteur DAF, égal à son opposé par le sommet BAR, compté à partir de AB. Le secteur BCDS″ = 4BAC — BAS″, et BAS″ = BAS si l'angle BAS″ est égal à l'angle BAS compté de B en S; et ainsi de suite.

§ 10. Avant d'aller plus loin, nous ferons une remarque importante sur une transcendante que l'on rencontre fréquemment dans la théorie des fonctions elliptiques. Cette transcendante est représentée par l'intégrale

$$\int \frac{dp}{1 - \mathfrak{c}^2 p^2} = P.$$

Si l'on considère $-\mathfrak{c}^2$ comme le carré de $\mathfrak{c}\sqrt{-1}$, on aura

$$P = \frac{1}{\mathfrak{c}\sqrt{-1}} \cdot \text{ arc } (\text{tang.} = \mathfrak{c}p\sqrt{-1}) + \text{const.};$$

ce qui devient, en vertu de la relation générale

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \text{ arc (tang.} = z\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2} \log. \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

qui lie les fonctions circulaires aux logarithmes,

$$P = \frac{1}{2\mathcal{C}} \log. \left(\frac{1+\mathcal{C}p}{1-\mathcal{C}p}\right) + \text{const.};$$

mais si l'on effectue l'intégration en décomposant le dénominateur $1 - \mathcal{C}^2 p^2$ en ses deux facteurs $1 + \mathcal{C}p$ et $1 - \mathcal{C}p$, on trouvera

$$P = \frac{1}{2\mathcal{C}} \log. \left(\frac{\mathcal{C}p+1}{\mathcal{C}p-1}\right) + \text{const.}$$

On comprendra ces deux valeurs de P en une seule formule, en écrivant

$$P = \frac{1}{2\mathcal{C}} \log. \left(\pm \frac{1+\mathcal{C}p}{1-\mathcal{C}p}\right) + \text{const.};$$

d'où il suit que si l'on veut que l'intégrale s'évanouisse avec p, il faudra déterminer le signe ambigu de manière à ce que P ne contienne point le logarithme d'une quantité négative.

§ 11. Occupons-nous maintenant de la discussion des trois transcendantes

$$\int \frac{A + B \sin.^2 \varphi}{C + D \sin.^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}, \quad \int \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}, \quad \int \frac{1}{a\mu + \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta},$$

qu'il s'agit de réduire aux fonctions elliptiques. D'abord, il est évident qu'à l'exception du cas où C serait nul, la première ne diffère pas de la fonction générale H, à laquelle on la ramène immédiatement en divisant les deux termes de la fraction par C.

Quand C est nul, on a

$$\int \frac{A + B \sin.^2 \varphi}{D \sin.^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{A}{D} \int \frac{d\varphi}{\sin.^2 \varphi . \Delta} + \frac{B}{D} \text{ dig. } \varphi,$$

ce qui donne lieu à une nouvelle transcendante $\int \frac{d\varphi}{\sin.^2 \varphi \Delta}$.

Pour la réduire, je différentie le produit $\Delta \cot.\varphi$; ce qui me donne successivement

$$d(\Delta \cot.\varphi) = \frac{-c^2 \sin.\varphi \cos.\varphi . d\varphi}{\Delta} \cdot \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi} - \Delta . \frac{d\varphi}{\sin.^2\varphi}$$

$$= \frac{-c^2 \cos.^2\varphi \, d\varphi}{\Delta} - \frac{\Delta^2 d\varphi}{\Delta \sin.^2\varphi}$$

$$= -\frac{d\varphi}{\Delta \sin.^2\varphi} (c^2 \sin.^2\varphi \cos.^2\varphi + \Delta^2)$$

$$= -\frac{d\varphi}{\Delta \sin.^2\varphi} (1 - c^2 \sin.^4\varphi) = -\frac{d\varphi}{\Delta \sin.^2\varphi} + \frac{c^2 \sin.^2\varphi . d\varphi}{\Delta}.$$

d'où (*)

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta \sin.^2\varphi} = \int \frac{c^2 \sin.^2\varphi . d\varphi}{\Delta} - \Delta \cot.\varphi = \text{dig.}\,\varphi - \text{eps.}\,\varphi - \Delta \cot.\varphi.$$

La valeur de la seconde transcendante s'obtient en observant que

$$\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1 - \cos.\varphi}{1 + \cos.\varphi} = \frac{(1 - \cos.\varphi)^2}{\sin.^2\varphi} ;$$

d'où

$$\int \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi . \frac{d\varphi}{\Delta} = 2 . \int \frac{d\varphi}{\Delta \sin.^2\varphi} - \int \frac{d\varphi}{\Delta} - 2 . \int \frac{\cos.\varphi \, d\varphi}{\Delta \sin.^2\varphi}.$$

Des trois intégrales du second membre, les deux premières nous sont connues, et la troisième s'obtient sans peine en posant $c \sin.\varphi = x$; on trouve ainsi

$$\int \frac{\cos.\varphi}{\Delta \sin.^2\varphi} = -\frac{\Delta}{\sin.\varphi},$$

et finalement, toute substitution faite,

$$\int \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi \, \frac{d\varphi}{\Delta} = 2\Delta \, \text{tang.} \tfrac{1}{2}\varphi + \text{dig.}\,\varphi - 2 \, \text{eps.}\,\varphi.$$

(*) On peut voir au § 14 une manière plus directe d'obtenir cette intégrale.

Pour réduire la troisième transcendante, nous écrirons $\frac{1-\cos.\varphi}{1+\cos.\varphi}$ au lieu de tang.$^2\frac{1}{2}\varphi$; ce qui donnera

$$(1)\ldots\int\frac{1}{a\mu+\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\int\frac{1+\cos.\varphi}{a\mu+1+(a\mu-1)\cos.\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Posant, pour abréger, $\frac{a\mu+1}{a\mu-1}=h$, il vient pour l'intégrale précédente

$$(2)\ldots\ldots\ldots\frac{1}{a\mu-1}\int\frac{1+\cos.\varphi}{h+\cos.\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$=\frac{1}{a\mu-1}\int\frac{(h-\cos.\varphi)\,(1+\cos.\varphi)}{h^2-\cos.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$=\frac{1}{a\mu-1}\int\frac{h-1+(h-1)\cos.\varphi+\sin.^2\varphi}{h^2-1+\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Sous cette forme, elle dépendra de

$$\int\frac{h-1+\sin.^2\varphi}{h^2-1+\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta},$$

la même que

$$\int\frac{A+B\sin.^2\varphi}{C+B\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta},$$

que nous venons de discuter, et de

$$\int\frac{\cos.\varphi}{h^2-1+\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Cette dernière expression s'intègre avec facilité en posant

$$h^2-1=m,\quad \sin.\varphi=\frac{1}{\sqrt{c^2+y^2}},$$

y étant une nouvelle variable. On obtient ainsi

$$(3)\ldots\ldots\int\frac{\cos.\varphi}{h^2-1+\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{m+m^2c^2}}\ \text{arc}\left(\text{tang.}=\frac{m\Delta}{\sin.\varphi.\sqrt{m+m^2c^2}}\right).$$

Si l'on avait $h^2 - 1 = o$, ce qui répond à $a = o$, cette équation se réduirait à

$$\int \frac{\cos.\varphi . d\varphi}{\sin.^2\varphi . \Delta} = -\frac{\Delta}{\sin.\varphi}.$$

Dans le cas de $a\mu + 1 = o$, on a $h = o$, $m = -1$ et la formule (3) devient

$$\int \frac{\cos.\varphi}{-1 + \sin.^2\varphi} . \frac{d\varphi}{\Delta} = -\frac{1}{\sqrt{-(1-c^2)}} \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{-\Delta}{\sin.\varphi\sqrt{-(1-c^2)}}\right);$$

mais, à cause de la relation $1 = b^2 + c^2$ entre le module c et son complément b, ainsi que de la formule générale

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \text{arc}(\text{tang.} = z\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2} \log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

il vient simplement

$$\int \frac{\cos.\varphi}{-1 + \sin.^2\varphi} . \frac{d\varphi}{\Delta} = -\frac{1}{2b} \log.\left(\frac{b \sin.\varphi + \Delta}{b \sin.\varphi - \Delta}\right).$$

Observons à l'égard de cette dernière équation, que la quantité entre parenthèses est essentiellement négative, car on a

$$\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi} = \sqrt{\cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\varphi},$$

et, par conséquent, $b \sin.\varphi < \Delta$. Mais si l'on fait $p = \frac{b \sin.\varphi}{\Delta}$, on reconnaîtra que l'intégrale cherchée revient à $-\frac{1}{b}\int\frac{dp}{1-p^2}$ et qu'ainsi on devra changer le signe de la quantité $b \sin.\varphi - \Delta$, en vertu de la remarque que nous avons faite au § 10, si l'on veut que l'intégrale s'évanouisse avec p ou, ce qui revient au même, avec l'amplitude φ.

Dans le cas de $a\mu - 1 = o$, la formule (1) devient

$$\int \frac{(1 + \cos.\varphi)\, d\varphi}{(a\mu + 1)\,\Delta} = \frac{1}{a\mu + 1}\left[\text{dig.}\,\varphi + \frac{1}{c}\,\text{arc}(\sin. = c \sin.\varphi)\right].$$

§ 12. Lorsque la constante a est imaginaire, m qui est une fonction de a devient également imaginaire ainsi que la fonction circulaire qui entre dans la formule (3). Dans ce cas, l'on commencera par mettre cette fonction sous la forme $A + B\sqrt{-1}$, A et B étant des

quantités réelles, par les méthodes connues. On remarquera ensuite que le polynome qui a fourni le facteur

$$\frac{N}{(x^2+a)^n} = \frac{N}{(x^2+\alpha+\beta\sqrt{-1})^n},$$

en contiendra nécessairement un autre de la forme

$$\frac{N'}{(x^2+a')^n} = \frac{N'}{(x^2+\alpha-\beta\sqrt{-1})^n},$$

qui donnera lieu à une seconde fonction circulaire dont la combinaison avec la précédente donnera un résultat réel. En effet, dans le § 4, au lieu de décomposer la fraction rationnelle P en facteurs de la forme $\frac{N}{(x^2+a)^n}$, N et a pouvant être imaginaires, nous eussions pu la décomposer en facteurs de la forme

$$\frac{M+M'x^2}{[(x^2+\alpha)^2+\beta^2]^m},$$

M, M', α et β étant toujours réels; de cette manière, la fonction $\int\frac{Pdx}{R}$ aurait dépendu d'un certain nombre de transcendantes élémentaires de la forme

$$\int\frac{M+M'x^2}{[(x^2+\alpha)^2+\beta^2]^m}\cdot\frac{dx}{R},$$

réelles de leur nature, puisqu'elles ne contiennent que des coefficients réels. Par conséquent, si un autre mode de décomposition fournit des transcendantes qui renferment des termes imaginaires, il faudra nécessairement que ceux-ci se détruisent entre eux soit immédiatement, soit après qu'ils auront été développés en séries.

§ 13. Résumé. Les trois transcendantes

$$\int\frac{dx}{R},\quad \int x^2\frac{dx}{R},\quad \int\frac{1}{x^2+a}\cdot\frac{dx}{R}$$

dont dépend, en dernière analyse, l'intégration de la fonction générale $\frac{Pdx}{R}$, peuvent toujours être réduites soit à des fonctions connues,

soit aux transcendantes elliptiques. Les valeurs de x^2 qui serviront à opérer cette réduction, seront de la forme

$$x^2 = \frac{A + B \sin.^2\varphi}{C + D \sin.^2\varphi},$$

ou

$$x^2 = M \tang.^2 \tfrac{1}{2}\varphi$$

si le radical ramené à la forme $\sqrt{1 \pm \beta x^2 + \gamma x^4}$ offre la relation

$$\beta^2 - 4\gamma < o.$$

§ 14. Théorème. *Si Q est une fonction rationnelle paire de sin.* φ, *la formule* $\int \frac{Q d\varphi}{\Delta}$ *pourra toujours se réduire aux fonctions elliptiques.*

Démonstration. Si l'on pose sin. $\varphi = x$, on obtient immédiatement

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (1 + c^2)\, x^2 + c^2 x^4}},$$

et Q étant une fonction rationnelle de sin.$^2\varphi$, devient une fonction rationnelle de x^2. Ainsi l'intégrale cherchée dépendra de la formule $\int \frac{P dx}{R}$, et se trouvera, par conséquent, sans difficulté en réduisant celle-ci aux transcendantes elliptiques qui en constituent la dernière expression. Mais on y parviendra d'une manière plus directe par la méthode suivante.

Considérons d'abord le cas où Q serait une fonction entière, et soit

$$Q = A + B \sin.^2\varphi + C \sin.^4\varphi + \text{etc.};$$

$$\int \frac{Q d\varphi}{\Delta} \text{ deviendra } A \int \frac{d\varphi}{\Delta} + B \int \frac{\sin.^2\varphi . d\varphi}{\Delta} + C \int \frac{\sin.^4\varphi . d\varphi}{\Delta} + \text{etc.};$$

mais en différentiant la quantité $\Delta \cos.\varphi \sin.^{2k-3}\varphi$, on trouve aisément la formule

$$(4). \ . \ . \left\{ \begin{aligned} \Delta \cos.\varphi \sin.^{2k-3}\varphi = {} & (2k-3) \int \frac{\sin.^{2k-4}\varphi . d\varphi}{\Delta} \\ & - (2k-2)(1+c^2) \int \frac{\sin.^{2k-2}\varphi . d\varphi}{\Delta} \\ & + (2k-1) c^2 \int \frac{\sin.^{2k}\varphi . d\varphi}{\Delta}; \end{aligned} \right.$$

d'où il suit que tous les cas de l'expression

$$\int \frac{\sin.^{2k}\varphi \,.\, d\varphi}{\Delta}$$

sont ramenés aux deux suivants

$$\int \frac{\sin.^{0}\varphi \,.\, d\varphi}{\Delta} = \int \frac{d\varphi}{\Delta} = \text{dig.}\ \varphi\,,$$

$$\int \frac{\sin.^{2}\varphi \,.\, d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c^2}\left(\int \frac{d\varphi}{\Delta} - \int \Delta d\varphi\right) = \frac{1}{c^2}\,(\text{dig.}\ \varphi - \text{eps.}\ \varphi).$$

Soit maintenant Q une fonction rationnelle quelconque de $\sin.^2\varphi$: après en avoir extrait la partie entière et l'avoir traitée comme il vient d'être dit, le développement de la partie fractionnaire pourra toujours se faire de manière que chaque fraction partielle soit de la forme

$$\frac{N}{(1 + n \sin.^2\varphi)^k},$$

n et N étant des coefficients constants réels ou imaginaires (*voyez la note* Ire). Il s'agira donc de réduire la formule

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2 \varphi)^k \Delta}$$

aux formules les plus simples de la même espèce. Or, si l'on différentie la fonction

$$\frac{\Delta \sin.\ \varphi \cos.\ \varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)^{k-1}}$$

on trouve pour résultat

$$\frac{d\varphi}{\Delta}\left\{\begin{array}{l}(1 + n\sin.^2\varphi)^{1-k}[1-(2+2c^2)\sin.^2\varphi + 3c^2\sin.^4\varphi] \\ +2n(1-k)(1+n\sin.^2\varphi)^{-k}[\sin.^2\varphi-(1+c^2)\sin.^4\varphi + c^2\sin.^6\varphi]\end{array}\right\}.$$

Faisant $1 + n \sin.^2\varphi = z$, d'où $\sin.^2\varphi = \frac{z-1}{n}$, et substituant dans le polynome entre accolades, on pourra lui donner la forme

$$\frac{A}{z^k} + \frac{B}{z^{k-1}} + \frac{C}{z^{k-2}} + \frac{D}{z^{k-3}}.$$

Remettant alors au lieu de z sa valeur $1 + n \sin.^2\varphi$, multipliant le résultat par $\frac{d\varphi}{\Delta}$ et prenant l'intégrale de chaque terme, il viendra

$$(5).\ .\ \left\{\begin{aligned} &\frac{\Delta \sin.\varphi \cos.\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)^{k-1}} = A\int\frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)^k\Delta} \\ &+ B\int\frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)^{k-1}\Delta} + C\int\frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)^{k-2}\Delta} \\ &+ D\int\frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)^{k-3}\Delta}; \end{aligned}\right.$$

formule dans laquelle A, B, C et D représentent les valeurs suivantes

$$A = (2k - 2)\frac{(1 + n)}{n}\left(1 + \frac{c^2}{n}\right),$$

$$B = -(2k - 3)\left(1 + \frac{2 + 2c^2}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right),$$

$$C = (2k - 4)\left(\frac{1 + c^2}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right),$$

$$D = -(2k - 5)\frac{c^2}{n^2}.$$

Si l'on y fait $k = 2$ et que l'on pose, pour abréger,

$$\alpha = (1 + n)\left(1 + \frac{c^2}{n}\right),$$

on aura

$$\frac{2\alpha}{n}\int\frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)^2\Delta} = \frac{\Delta \sin.\varphi \cos.\varphi}{1 + n \sin.^2\varphi}$$

$$+ \left(1 + \frac{2 + 2c^2}{n} + \frac{3c^2}{n^2}\right) \text{kap.}\,\varphi - \frac{c^2}{n^2}\int(1 + n \sin.^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Mais, au moyen de la formule (4), on trouve

$$\int(1 + n \sin.^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta} = \left(1 + \frac{n}{c^2}\right) \text{dig.}\,\varphi - \frac{n}{c^2}\,\text{eps.}\,\varphi\ ;$$

par conséquent

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{2a}{n}\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)^2\Delta} =$$

$$\frac{\Delta\sin.\varphi\cos.\varphi}{1+n\sin.^2\varphi} - \left(\frac{1}{n}+\frac{c^2}{n^2}\right)\text{dig.}\varphi + \frac{1}{n}\text{eps.}\varphi + \left(1+\frac{2+2c^2}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\text{kap.}\varphi.$$

Si l'on fait $k=1$ dans la formule (4), on tombe sur la valeur de $\int\frac{d\varphi}{\Delta\sin.^2\varphi}$ trouvée au § 11.

§ 15. Les formules (4) et (5) offrent le moyen le plus sûr et le plus facile de ramener l'intégrale $\int\frac{Pdx}{R}$ aux fonctions elliptiques, chaque fois que l'on n'aura pas simultanément $R=\sqrt{1\pm\beta x^2+\gamma x^4}$ et $\beta^2-4\gamma<o$. En effet, les valeurs de x^2 qui servent à opérer la réduction de ce radical étant alors de la forme

$$x^2 = \frac{A+B\sin.^2\varphi}{C+D\sin.^2\varphi},$$

leur substitution dans le polynome P n'y introduira que des puissances paires de $\sin.\varphi$, et l'intégrale proposée prendra immédiatement la forme $\int\frac{Qd\varphi}{\Delta}$.

Il n'en sera pas de même dans le cas d'exception précité : alors le radical affectant la forme

$$R = \sqrt{1+2\mu x^2\cos.\theta+\mu^2x^4}\ (\S\,6),$$

il faudra prendre

$$x^2 = \frac{1}{\mu}\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1-\cos.\varphi}{1+\cos.\varphi},$$

valeur que l'on ne pourra substituer dans P sans y introduire des puissances impaires du cosinus.

Pour éluder cette difficulté, on cherchera d'abord à transformer le radical de manière à ce qu'il offre le produit de deux facteurs binomes réels. On y parviendra par l'hypothèse

$$\mu x^2+\cos.\theta+\sqrt{1+2\mu x^2\cos.\theta+\mu^2x^4} = 2y^2,$$

qui donne

$$x^2 = \frac{1}{\mu}\left(y^2 - \cos.\,\theta - \frac{\sin.^2\theta}{4y^2}\right),$$

et

$$\int\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2 - \cos.^2\tfrac{1}{2}\theta)\,(y^2 + \sin.^2\tfrac{1}{2}\theta)}},$$

où l'on voit qu'en effet les deux facteurs de la quantité sous le radical sont réels. On voit aussi que la moindre valeur de y étant $\cos.\,\frac{1}{2}\theta$, on pourra faire $y = \frac{\cos.\,\frac{1}{2}\theta}{\cos.\,\varphi}$, ce qui donnera la transformée suivante, où l'on a fait $c = \sin.\,\frac{1}{2}\theta$,

$$\int\frac{dx}{R} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi}};$$

et x^2 deviendra

$$x^2 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\cos.^2\frac{1}{2}\theta}{\cos.^2\varphi} - \cos.\,\theta - \frac{\sin.^2\theta.\cos.^2\varphi}{4\cos.^2\frac{1}{2}\theta}\right).$$

En substituant cette valeur, on atteindra, à la vérité, le but proposé; mais cette méthode a l'inconvénient de rendre le polynome transformé Q, d'un degré double de celui du polynome P. C'est pourquoi, nous pensons que, dans le cas d'exception dont il s'agit, il est plus avantageux de ramener l'intégrale $\int\frac{Pdx}{R}$ aux trois transcendantes

$$\int\frac{dx}{R},\ \int\frac{x^2dx}{R},\ \int\frac{dx}{(x^2 + a)R};$$

sauf à réduire ensuite ces transcendantes, soit aux fonctions elliptiques, soit aux logarithmes et aux arcs de cercle.

CHAPITRE III.

Propriétés générales des digamma de même module.

§ 16. La première et la plus simple des fonctions elliptiques est $\int \frac{d\varphi}{\Delta}$, que nous avons nommée *digamma*, et dont nous allons donner une représentation géométrique (*voyez la note* II).

On sait que l'aire mixtiligne comprise entre un arc de courbe et les deux rayons vecteurs qui le terminent, a pour expression $\frac{1}{2}\int \rho^2 d\varphi$, en désignant par ρ le rayon vecteur et par φ l'angle compris. Si nous posons l'égalité

$$\frac{1}{2}\int \rho^2 d\varphi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}},$$

l'équation polaire que nous en déduirons

$$\rho^2 = \frac{2}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}},$$

sera celle de la courbe CBED (*fig.* 1) qui jouira de la propriété que l'aire RAB sera égale au digamma de l'angle φ. Nous l'appellerons la *fausse ellipse*, à cause de son extrême ressemblance avec l'ellipse, courbe à laquelle il est donc naturel de la comparer.

L'équation de l'ellipse dont le demi-grand axe $= 1$, le demi-petit axe $= b$, et l'excentricité $= c$, est $y^2 + b^2 x^2 = b^2$: si l'on prend le centre pour pôle, et qu'on représente par φ l'angle entre le rayon vecteur R et le petit axe, l'équation polaire de cette courbe sera, puisque $y = \mathrm{R} \cos. \varphi$ et $x = \mathrm{R} \sin \varphi$,

$$\mathrm{R} = \frac{b}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}};$$

d'où l'on conclut cette relation

$$\rho^2 = \frac{2R}{b},$$

qui subsiste pour toutes les amplitudes et pour tous les modules. Il s'ensuit aussi que, si l'on construit une parabole dont le paramètre $= \frac{2}{b}$, ses abscisses représenteront les rayons vecteurs de l'ellipse, et ses ordonnées ceux de la fausse ellipse.

Nous profiterons de cette propriété pour construire la fausse ellipse par points. Après avoir construit l'ellipse *cbed*, que nous nommerons *l'ellipse génératrice*, dont le grand axe $= 2$ et l'excentricité $= c$, et mené autant de rayons vecteurs que l'on voudra, on prendra sur la ligne indéfinie $\overline{Dx}$ (*fig.* 2), deux longueurs $\overline{AD}$, $\overline{AF}$ égales entre elles et à $\frac{1}{2b}$. Alors, si $\overline{Ap}$ représente un rayon vecteur de l'ellipse, $\overline{pm}$ représentera le rayon vecteur correspondant de la fausse ellipse, pourvu que $\overline{Fm}$ ait été pris égal à $\overline{Dp}$.

En effet, par cette construction, le point m appartiendra à une parabole dont la directrice sera $\overline{DE}$, le sommet A et le foyer F.

Soit $2a$ le grand axe d'une ellipse quelconque : l'équation de la fausse ellipse devient

$$\rho^2 = \frac{2a^3}{\sqrt{a^2 - c^2 \sin.^2\varphi}},$$

si l'on y met, au lieu de l'unité, les puissances du demi-grand axe a qu'elle doit représenter pour que l'équation soit homogène. Faisant successivement $\varphi = o$ et $\varphi = 90°$, on a pour valeurs du demi-petit axe et du demi-grand axe de la fausse ellipse

$$B = \sqrt{2a^2}, \quad A = \sqrt{\frac{2a^3}{b}};$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{A^2B^2}{\sqrt{A^4 \cos.^2\varphi + B^4 \sin.^2\varphi}}.$$

C'est l'équation générale d'une fausse ellipse de dimensions quelconques, rapportée à son centre et à ses axes.

§ 17. La propriété la plus remarquable des digamma fait l'objet du théorème suivant :

Étant données deux amplitudes φ et ψ, on peut toujours assigner algébriquement une troisième amplitude μ, telle que

$$\text{dig.}\,\varphi \pm \text{dig.}\,\psi = \text{dig.}\,\mu.$$

En différentiant l'équation précédente dans l'hypothèse de μ constant (ce qui est permis, car les variations de φ peuvent être attribuées à celles de la seule amplitude ψ), on obtient

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \pm \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = o.$$

Choisissons une nouvelle variable t, telle que $dt = \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$: nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta(\varphi), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \mp\Delta(\psi),$$

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \Delta^2(\varphi), \qquad \frac{d\psi^2}{dt^2} = \Delta^2(\psi);$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -c^2\sin.\varphi\cos.\varphi, \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} = -c^2\sin.\psi\cos.\psi.$$

Si l'on prend $p = \varphi + \psi$, $q = \varphi - \psi$, il viendra

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(p+q),\ \psi = \tfrac{1}{2}(p-q);\ d^2\varphi + d^2\psi = d^2p,\ d^2\varphi - d^2\psi = d^2q;$$

$$(1).\ \ldots\ldots\ \frac{d^2p}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}c^2[\sin.(p+q) + \sin.(p-q)] = -c^2\sin.p\cos.q,$$

$$(2).\ \ldots\ldots\ \frac{d^2q}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}c^2[\sin.(p+q) - \sin.(p-q)] = -c^2\cos.p\sin.q.$$

Mais on a aussi

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} = \frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{d\psi^2}{dt^2} = -c^2(\sin.^2\varphi - \sin.^2\psi) = \tfrac{1}{2}c^2(\cos.2\varphi - \cos.2\psi)$$

$$= \tfrac{1}{2}c^2[\cos.(p+q) - \cos.(p-q)] = -c^2\sin.p\sin.q:$$

divisant les équations (1) et (2) par

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt} = -c^2 \sin. p \sin. q,$$

on aura

$$\frac{d^2p}{dp\,dq} = \frac{\cos. q}{\sin. q}, \text{ ou } \frac{d\,p}{dp} = \frac{dq \cos. q}{\sin. q};$$

$$\frac{d^2q}{dp\,dq} = \frac{\cos. p}{\sin. p}, \text{ ou } \frac{d^2q}{dq} = \frac{dp \cos. p}{\sin. p}.$$

Ces deux résultats s'intègrent, et donnent, en désignant par α et par α' des constantes arbitraires,

$$\log. \frac{dp}{dt} = \log. \sin. q + \log. \alpha, \quad \log. \frac{dq}{dt} = \log. \sin. p + \log. \alpha';$$

et, passant aux nombres,

$$\frac{dp}{dt} = \alpha \sin. q, \quad \frac{dq}{dt} = \alpha' \sin. p.$$

Remplaçant p, q, $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ par leurs valeurs, on aura

(3) . . . . . $\Delta(\varphi) \mp \Delta(\psi) = \alpha \sin. (\varphi - \psi).$

(4) . . . . . $\Delta(\varphi) \pm \Delta(\psi) = \alpha' \sin. (\varphi + \psi).$

Chacune de ces équations est une intégrale de l'équation différentielle dont nous sommes parti; mais on peut en obtenir une troisième qui sera plus simple, en éliminant dt entre les équations

$$\frac{dp}{dt} = \alpha \sin. q, \quad \frac{dq}{dt} = \alpha' \sin. p:$$

la résultante

$$\alpha dq \sin. q = \alpha' dp \sin. p,$$

et son intégrale

$$\alpha \cos. q = \alpha' \cos. p + \alpha'',$$

conviendront à l'équation différentielle, lorsqu'on aura réduit à une seule les trois constantes arbitraires α, α' et α''.

Pour y parvenir, je remarque que, puisque $\psi = o$ donne dig. $\psi = o$, il suit de l'équation hypothétique dig. $\varphi \pm$ dig. $\psi =$ dig. μ, que μ est

ce que devient l'arc φ dans l'hypothèse de $\psi = o$. Les deux intégrales (3) et (4) donnent alors

$$\alpha = \frac{\mp 1 + \Delta(\mu)}{\sin.\mu}, \quad \alpha' = \frac{\pm 1 + \Delta(\mu)}{\sin.\mu}:$$

mettant ces valeurs dans l'équation $\alpha \cos. q = \alpha' \cos. p + \alpha''$, qui (dans l'hypothèse actuelle où $p = q = \mu$) devient $(\alpha - \alpha') \cos. \mu = \alpha''$, nous aurons

$$\alpha'' = \mp 2 \frac{\cos. \mu}{\sin. \mu};$$

substituant ensuite dans $\alpha \cos. q = \alpha' \cos. p + \alpha''$, après y avoir mis $\varphi + \psi$ et $\psi - \psi$ à la place de p et de q, nous obtiendrons

$$\cos. (\varphi - \psi). [\mp 1 + \Delta(\mu)] = \cos. (\varphi + \psi) [\pm 1 + \Delta(\mu)] \mp 2 \cos. \mu;$$

résultat qui se réduit à

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos. \varphi \cos. \psi \mp \sin. \varphi \sin. \psi \ \Delta(\mu) = \cos. \mu.$$

§ 18. Le premier usage qu'on peut faire de cette équation double, consiste à trouver l'arc μ qui répond à la somme où à la différence des digamma de φ et de ψ, lorsque ces arcs sont connus. Il faut, pour cela, résoudre l'équation (5) par rapport à sin. μ ou à cos. μ; mais on arrivera plus facilement au résultat, en mettant dans les équations (3) et (4) les valeurs de α et de α' rapportées plus haut, et en éliminant successivement $\Delta(\mu)$ et sin. μ. Pour éviter les embarras du double signe, nous opèrerons ces calculs avec les signes supérieurs seulement : nous obtiendrons de cette manière, après les réductions et les développements nécessaires,

$$\sin. \mu = \frac{\sin.^2\varphi \cos.^2\psi - \cos.^2\varphi \sin.^2\psi}{\sin. \varphi \cos. \psi \Delta(\psi) - \sin. \psi \cos. \varphi \Delta(\varphi)},$$

$$\Delta(\mu) = \frac{\sin. \varphi \cos. \psi \Delta(\psi) - \sin. \psi \cos. \varphi \Delta(\psi)}{\sin. \varphi \cos. \psi \Delta(\psi) - \sin. \psi \cos. \varphi \Delta(\varphi)}.$$

On multipliera ensuite les deux termes de chacune de ces fractions, par sin. φ cos. $\psi \Delta(\psi)$ + sin. ψ cos. $\varphi \Delta(\varphi)$, et on les divisera en même temps par

$$\sin.^2\varphi \cos.^2\psi - \cos.^2\varphi \sin.^2\psi,$$

en observant que cette quantité n'est autre que

$$(1 - \cos.^2\varphi)\cos.^2\psi - (1 - \cos.^2\psi)\cos.^2\varphi = \cos.^2\psi - \cos.^2\varphi,$$
$$(1 - \sin.^2\psi)\sin.^2\varphi - (1 - \sin.^2\varphi)\sin.^2\psi = \sin.^2\varphi - \sin.^2\psi :$$

il viendra, pour lors,

$$(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin.\mu = \frac{\sin.\varphi\cos.\psi\Delta(\psi) + \sin.\psi\cos.\varphi\Delta(\varphi)}{1 - c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi},$$

$$(b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta(\mu) = \frac{\Delta(\varphi)\Delta(\psi) - c^2\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\varphi\cos.\psi}{1 - c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi}.$$

Substituant cette dernière valeur dans l'équation

$$\cos.\varphi\cos.\psi - \sin.\varphi\sin.\psi.\Delta(\mu) = \cos.\mu,$$

on aura

$$(c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos.\mu = \frac{\cos.\varphi\cos.\psi - \sin.\varphi\sin.\psi\,\Delta(\varphi)\,\Delta(\psi)}{1 - c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi};$$

d'où l'on déduira

$$(d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{tang.}\mu = \frac{\text{tang.}\varphi\,\Delta(\psi) + \text{tang.}\psi\,\Delta(\varphi)}{1 - \text{tang.}\varphi\,\text{tang.}\psi\,\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}.$$

Dans le cas où l'on considère les signes inférieurs (ce qui revient à changer $+\psi$ en $-\psi$, et par conséquent

$$+\sin.\psi,\ +\text{tang.}\psi,\ +\text{dig.}\psi,$$

en

$$-\sin.\psi,\ -\text{tang.}\psi,\ -\text{dig.}\psi,$$

tandis que les fonctions $\cos.\psi$ et $\Delta(\psi)$ restent les mêmes), on trouve, en vertu de ce qui précède,

$$\sin.\mu = \frac{\sin.\varphi\cos.\psi\Delta(\psi) - \sin.\psi\cos.\varphi\Delta(\varphi)}{1 - c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi},$$

$$\Delta(\mu) = \frac{\Delta(\varphi)\Delta(\psi) + c^2\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\varphi\cos.\psi}{1 - c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi},$$

$$\cos.\mu = \frac{\cos.\varphi\cos.\psi + \sin.\varphi\sin.\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}{1 - b^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi},$$

$$(e) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{tang.}\mu = \frac{\text{tang.}\varphi\Delta(\psi) - \text{tang.}\psi\Delta(\varphi)}{1 + \text{tang.}\varphi\,\text{tang.}\psi\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}.$$

§ 19. La construction de l'ellipse génératrice facilite beaucoup celle des formules (*d*) et (*e*), qui donnent la tangente de l'amplitude μ correspondante à la somme ou à la différence de deux digamma. La formule (*d*), par exemple, donne $\mu = \varphi' + \psi'$ quand

$$\text{tang.}\,\varphi' = \text{tang.}\,\varphi\Delta(\psi),\ \text{tang.}\,\psi' = \text{tang.}\,\psi\Delta(\varphi)\ :$$

or, si l'on construit à la fois l'ellipse *cbe* (*fig.* 1), et le cercle *cpe* dont le rayon est l'unité, on aura

$$\text{tang.}\,\varphi = \overline{mp},\ \Delta(\psi) = \frac{b}{\overline{Ar'}};$$

$$\text{tang.}\,\psi = \overline{m'p},\ \Delta(\varphi) = \frac{b}{\overline{Ar}};$$

d'où

$$\text{tang.}\,\varphi' : \overline{mp} :: b : \overline{Ar'},$$

$$\text{tang.}\,\psi' : \overline{m'p} :: b : \overline{Ar}.$$

De cette manière, on pourra construire par leurs tangentes trigonométriques, les angles φ' et ψ' dont la somme μ répond à l'aire BAS, égale à la somme des aires R'AB et RAB.

Si l'on fait $\mu = \frac{1}{2}\pi$ dans la formule générale

$$\text{dig.}\,(\varphi) + \text{dig.}\,(\psi) = \text{dig.}\,(\mu),$$

les deux fonctions seront en quelque sorte *compléments* l'une de l'autre, puisque leur somme est égale à la fonction complète D. Alors on aura immédiatement, par la formule (5) du § 17, l'équation

$$b\ \text{tang.}\,\varphi\ \text{tang.}\,\psi = 1\,;$$

d'où l'on déduit, pour l'expression de ψ en φ,

$$\sin.\,\psi = \frac{\cos.\,\varphi}{\Delta(\varphi)},\ \cos.\,\psi = \frac{b\sin.\,\varphi}{\Delta(\varphi)},\ \Delta(\psi) = \frac{b}{\Delta(\varphi)}.$$

Si l'on prend les angles φ et ψ l'un au-dessus et l'autre au-dessous

du petit axe de la fausse ellipse, le secteur qui répondra à leur somme, sera équivalent au quart de l'aire de cette courbe. De plus, les deux rayons vecteurs ρ et ρ' qui correspondent à ces angles, sont liés entre eux par une propriété que nous allons démontrer.

D'après le § 16, nous avons

$$\rho^2 = \frac{A^2B^2}{\sqrt{A^4 \cos.^2\varphi + B^4 \sin.^2\varphi}}, \quad \rho'^2 = \frac{A^2B^2}{\sqrt{A^4 \cos.^2\psi + B^4 \sin.^2\psi}}.$$

L'équation de condition $1 = b \tang.\varphi \tang.\psi$, devient $a = b \tang.\varphi \tang.\psi$, quand le demi-grand axe de l'ellipse génératrice n'est pas égal à l'unité. Remplaçant a et b par leurs valeurs, déduites des équations

$$A = \sqrt{\frac{2a^3}{b}}, \quad B = \sqrt{2a^2},$$

que nous avons trouvées au § 16, il viendra

$$A^2 \cos.\varphi \cos.\psi - B^2 \sin.\varphi \sin.\psi = o :$$

multipliant entre elles les valeurs de ρ^2 et de ρ'^2, l'équation précédente réduit ce produit à

$$\rho\rho' = AB ;$$

propriété analogue à celle des diamètres conjugués dans l'ellipse.

Le secteur RAB (*fig.* 1) de la fausse ellipse, étant toujours moindre que le secteur correspondant pris sur le cercle dont le rayon est $\rho = \overline{AR}$, et plus grand que le secteur correspondant pris sur le cercle dont le rayon est $\overline{AB} = B$, on a

$$\text{dig.}\,\varphi < \frac{\varphi}{\Delta}, \quad \text{dig.}\,\varphi > \varphi.$$

Lorsqu'on sort des limites assignées à la constante c, la transcendante digamma change de nature, et se réduit à des fonctions connues. Ainsi

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}} = \text{dig.}\,\varphi$$

devient, quand $c = o$,

$$\int d\varphi = \varphi ;$$

c'est-à-dire que le digamma est alors l'amplitude même. Dans le cas de $c=1$, on a

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}=\int\frac{d\varphi}{\cos.\varphi}=\tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}\right)=\log.\tang.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\varphi).$$

§ 20. Puisqu'au moyen des formules du § 18, on peut trouver l'amplitude de la somme ou de la différence de deux digamma, il est clair qu'on peut résoudre sur la multiplication et la division des secteurs de la fausse ellipse, les mêmes problèmes qu'on résout sur la multiplication et la division des arcs de cercle. On peut donc se proposer le problème suivant :

Assigner l'amplitude φ_n, *correspondante à un digamma qui vaille* n *fois le digamma d'un arc donné* φ.

C'est, comme on le voit, déduire la valeur de φ_n de l'équation transcendante

$$\text{dig.}(\varphi_n)=n\ \text{dig.}(\varphi).$$

Considérons d'abord le cas le plus simple, qui est celui de la duplication : il suffira de faire $\psi=\varphi$ dans les formules du § 18 ; ce qui donnera

$$\sin.\varphi_2=\frac{2\sin.\varphi\cos.\varphi\Delta(\varphi)}{1-c^2\sin.^4\varphi},$$

$$\cos.\varphi_2=\frac{1-2\sin.^2\varphi+c^2\sin.^4\varphi}{1-c^2\sin.^4\varphi},$$

$$\Delta(\varphi_2)=\frac{1-2c^2\sin.^2\varphi+c^2\sin.^4\varphi}{1-c^2\sin.^4\varphi},$$

$$\tang.(\varphi_2)=\frac{2\tang.\varphi\,\Delta(\varphi)}{1-\tang.^2\varphi+c^2\sin.^2\varphi\tang.^2\varphi}.$$

Mais, à l'aide de la formule de trigonométrie

$$\tang.\tfrac{1}{2}x=\frac{1-\cos.x}{\sin.x},$$

la dernière expression se remplacera avec avantage par la suivante

$$\tang.(\tfrac{1}{2}\varphi_2)=\tang.\varphi\Delta(\varphi).$$

En suivant cette marche, on trouvera successivement

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_4\right) = \text{tang.}\varphi_2\Delta(\varphi_2),\ \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_8\right) = \text{tang.}\varphi_4\Delta(\varphi_4)\ldots\ldots$$

et, en général,

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_{2n}\right) = \text{tang.}\left(\varphi_n\right)\Delta\left(\varphi_n\right).$$

Essayons maintenant de résoudre le problème inverse de la duplication, c'est-à-dire de déterminer φ au moyen de φ_2. Pour cela, il faudra résoudre par rapport à $\sin.^2\varphi$, l'équation

$$\cos.\ \varphi_2 = \frac{1 - 2\sin.^2\varphi + c^2\sin.^4\varphi}{1 - c^2\sin.^4\varphi}\ ;$$

en se rappelant que

$$\Delta\left(\varphi_2\right) = \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi_2}\ ,$$

on trouvera successivement

$$\sin.^2\varphi = \frac{1 \pm \Delta\left(\varphi_2\right)}{c^2(1 + \cos.\ \varphi_2)} = \frac{\left[1 \pm \Delta\left(\varphi_2\right)\right]\left[1 \mp \Delta\left(\varphi_2\right)\right]}{c^2(1 + \cos.\varphi_2)\left[1 \mp \Delta\left(\varphi_2\right)\right]}$$

$$= \frac{\sin.^2\varphi_2}{2\cos.^2\tfrac{1}{2}\varphi_2\left[1 \mp \Delta\left(\varphi_2\right)\right]}.$$

$$\sin.\varphi = \frac{\sin.\ \varphi_2}{\sqrt{2\left[1 \mp \Delta\left(\varphi_2\right)\right]}\cos.\ \tfrac{1}{2}\varphi_2} = \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\varphi_2}{\sqrt{\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\Delta\left(\varphi_2\right)}}.$$

Cette formule donne pour $\sin.\ \varphi$ deux valeurs, parce que l'angle φ_2 et son supplément ont le même sinus. Si l'angle φ_2 est aigu, on prendra le signe inférieur, puisque c'est celui qui donne la plus petite valeur pour $\sin.\ \varphi$. En appelant, par analogie, $\varphi_{\frac{1}{2}}$ l'amplitude du digamma qui est égal à la moitié de celui de φ, on aura

$$\sin.\ \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\ \varphi}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\Delta\left(\varphi\right)}}.$$

Si l'on fait $c\ \sin.\ \varphi = \sin.\ \theta$, ce qui donne $\Delta\left(\varphi\right) = \cos.\ \theta$, on aura plus simplement

$$\sin.\ \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\varphi}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\theta}\ ,$$

et l'on satisfera ainsi à l'équation

$$\text{dig.}\ \varphi\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\ \text{dig.}\ \varphi.$$

Passons à la recherche des amplitudes correspondantes à des multiples quelconques de dig. φ.

Soient φ_{n+i}, φ_{n-i}, deux amplitudes qui, d'après la notation adoptée, répondent aux fonctions

$$\text{dig.}\ (\varphi_{n+i}) = (n+i)\ \text{dig.}\ \varphi = n\ \text{dig.}\ \varphi + i\ \text{dig.}\ \varphi = \text{dig.}\ (\varphi_n) + \text{dig.}\ (\varphi_i),$$

$$\text{dig.}\ (\varphi_{n-i}) = (n-i)\ \text{dig.}\ \varphi = n\ \text{dig.}\ \varphi - i\ \text{dig.}\ \varphi = \text{dig.}\ (\varphi_n) - \text{dig.}\ (\varphi_i):$$

nous pourrons faire usage des formules du § 18, en y écrivant φ_n au lieu de φ, et φ_i au lieu de ψ; ce qui donnera

$$\text{sin.}\ (\varphi_{n\pm i}) = \frac{\text{sin.}\ (\varphi_n)\ \text{cos.}\ (\varphi_i)\ \Delta\ (\varphi_i) \pm \text{sin.}\ (\varphi_i)\ \text{cos.}\ (\varphi_n)\ \Delta\ (\varphi_n)}{1 - c^2\ \text{sin.}^2\ (\varphi_n)\ \text{sin.}^2\ (\varphi_i)},$$

$$\text{cos.}\ (\varphi_{n\pm i}) = \frac{\text{cos.}\ (\varphi_n)\ \text{cos.}\ (\varphi_i) \mp \text{sin.}\ (\varphi_n)\ \text{sin.}\ (\varphi_i)\ \Delta\ (\varphi_n)\ \Delta\ (\varphi_i)}{1 - c^2\ \text{sin.}^2\ (\varphi_n)\ \text{sin.}^2\ (\varphi_i)};$$

d'où

$$\text{sin.}\ (\varphi_{n+i}) + \text{sin.}\ (\varphi_{n-i}) = \frac{2\ \text{sin.}\ (\varphi_n)\ \text{cos.}\ (\varphi_i)\ \Delta\ (\varphi_i)}{1 - c^2\ \text{sin.}^2\ (\varphi_n)\ \text{sin.}^2\ (\varphi_i)},$$

$$\text{cos.}\ (\varphi_{n+i}) + \text{cos.}\ (\varphi_{n-i}) = \frac{2\ \text{cos.}\ (\varphi_n)\ \text{cos.}\ (\varphi_i)}{1 - c^2\ \text{sin.}^2\ (\varphi_n)\ \text{sin.}^2\ (\varphi_i)},$$

et, en divisant ces deux formules l'une par l'autre,

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ (\varphi_{n+i} + \varphi_{n-i}) = \text{tang.}\ (\varphi_n)\ \Delta\ (\varphi_i).$$

Soit, pour abréger,

$$2\ \Delta\ (\varphi)\ \text{cos.}\ \varphi = p,$$

$$1 - c^2\ \text{sin.}^4\ \varphi = q,$$

$$c^2\ \text{sin.}^4\ \varphi = r:$$

on trouve, pour la suite des sinus,

$$\sin.\varphi_2 = \frac{p}{q}\sin.\varphi,$$

$$\sin.\varphi_3 = \frac{p^2-q^2}{q^2-rp^2}\sin.\varphi,$$

$$\sin.\varphi_4 = \frac{(1+r)p^2-2q^2}{q^4-rp^4}pq\ \sin.\varphi,$$

$$\sin.\varphi_5 = \frac{q^6-3p^2q^4+(1+2r)p^4q^2-r^2p^6}{q^6-3rp^2q^4+r(r+2)p^4q^2-rp^6}\sin.\varphi,$$

etc.;

et pour celle des cosinus, on a, en faisant de plus

$$s = 1-2\sin.^2\varphi + r = 2\cos.^2\varphi - q:$$

$$\cos.\varphi_2 = \frac{s}{q},$$

$$\cos.\varphi_3 = \frac{2sq-q^2+p^2r}{q^2-rp^2}\cos.\varphi,$$

$$\cos.\varphi_4 = \frac{q^4-2q^2p^2\sin.^2\varphi+rp^4}{q^4-rp^4},$$

$$\cos.\varphi_5 = \left[\frac{(2sq^3-2p^2qrs)(2sq-q^2+rp^2)}{q^6-3rp^2q^4+r(r+2)p^4q^2-rp^6}-1\right]\cos.\varphi,$$

etc.

Connaissant la suite des sinus et des cosinus, il sera aisé d'en déduire celle des tangentes, des cotangentes ou de telles fonctions trigonométriques que l'on voudra.

Lorsqu'il s'agira de calculer φ_n par le moyen de φ, on emploiera la formule

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}) = \Delta\,\text{tang.}\varphi_n,$$

d'où l'on tire

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \Delta\,\text{tang.}\varphi,$$

$$\text{tang.}(\tfrac{1}{2}\varphi_3+\tfrac{1}{2}\varphi) = \Delta\,\text{tang.}\varphi_2,$$

$$\text{tang.}(\tfrac{1}{2}\varphi_4+\tfrac{1}{2}\varphi_2) = \Delta\,\text{tang.}\varphi_3,$$

etc.

On connaîtra ainsi successivement, par un calcul très-simple, les valeurs de φ_2, φ_3, etc.

§ 21. La division d'un digamma donné en un certain nombre de parties égales, est un problème algébrique qu'on résoudra par le développement des formules qui servent à la multiplication. On a déja vu les formules pour diviser par 2 ou par une puissance de 2. Supposons qu'on veuille diviser en trois parties égales un digamma quelconque : on désignera son amplitude par φ_3, et φ sera celle du tiers de ce digamma. On aura donc pour déterminer sin. φ, l'équation

$$\sin.(\varphi_3) = \frac{p^2 - q^2}{q^2 - rp^2} \sin.\varphi$$

$$= \frac{4(1 - c^2\sin.^2\varphi)(1 - \sin.^2\varphi) - (1 - c^2\sin.^4\varphi)^2}{(1 - c^2\sin.^4\varphi)^2 - 4c^2\sin.^4\varphi(1 - c^2\sin.^2\varphi)(1 - \sin.^2\varphi)} \sin.\varphi,$$

qui s'élève au neuvième degré. Elle serait du vingt-cinquième pour la quintisection, et ainsi de suite.

Les équations sont moins élevées de moitié, lorsqu'il s'agit de diviser un digamma complet en un nombre impair de parties. Il en est, à cet égard, de la division des digamma comme de celle des arcs de cercle : tandis que la division d'un arc quelconque en n parties égales, exige la résolution d'une équation du n^{me} degré, celle du quart de circonférence n'exige que la résolution d'une équation du degré $\frac{n-1}{2}$.

Supposons, en général, $\varphi_n = \frac{1}{2}\pi$, afin qu'on ait dig. $\varphi = \frac{1}{n}$ D : en faisant

$$\frac{n-1}{n} \mathrm{D} = \mathrm{dig.}\,\varphi_{n-1},$$

on aura

$$\mathrm{dig.}\,\varphi + \mathrm{dig.}\,\varphi_{n-1} = \mathrm{D},$$

et, par conséquent (§ 19),

$$b \tang.\varphi \tang.\varphi_{n-1} = 1 ;$$

d'où l'on déduit

$$\tang.\varphi_{n-1} = \frac{1}{b}\cot.\varphi, \tang.\varphi_{n-3} = \frac{1}{b}\cot.\varphi_3, \tang.\varphi_{n-5} = \frac{1}{b}\cot.\varphi_5, \text{ etc.}$$

Si l'on change successivement n en $n-1$, $n-3$, $n-5$, etc., dans la formule générale

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_{n+1}+\tfrac{1}{2}\varphi_{n-1}\right)=\Delta\ \text{tang}\ \varphi_n,$$

démontrée au § précédent, il viendra (à cause de $\varphi_n=\frac{1}{2}\pi$)

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi_{n-2}\right)=\Delta\ \text{tang.}\ \varphi_{n-1}=\frac{\Delta}{b}\ \text{cot.}\ \varphi,$$

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_{n-2}+\tfrac{1}{2}\varphi_{n-4}\right)=\Delta\ \text{tang.}\ \varphi_{n-3}=\frac{\Delta}{b}\ \text{cot.}\ \varphi_3,$$

etc.

De là résultent des formules assez simples pour déterminer φ_{n-2}, φ_{n-4}, etc.; développant celles qui donnent cot. φ_3, cot. φ_5, etc., on aura, par la rencontre de ces deux suites, l'équation qui doit déterminer φ, et le calcul sera moins compliqué que par le développement de sin. φ_n ou de cos. φ_n.

Par exemple, lorsque $n=5$, il faudra éliminer $\frac{1}{2}\varphi_3$ entre les deux équations

$$\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi_3\right)=\frac{\Delta}{b}\ \text{cot.}\varphi,\quad \text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_3+\tfrac{1}{2}\varphi\right)=\Delta\ \text{tang.}\ \varphi_2=\frac{\Delta}{b}\ \text{cot.}\ \varphi_3,$$

et mettre ensuite, au lieu de cot. φ_3, sa valeur

$$\frac{2sq-q^2+p^2r}{p^2-q^2}\ \text{cot.}\ \varphi,$$

déduite des équations du § 20. Cependant, il sera plus avantageux, dans ce cas particulier, de remplacer tang. φ_2 par sa valeur

$$\frac{2\Delta\ \text{sin.}\varphi\ \text{cos.}\ \varphi}{1-2\,\text{sin.}^2\varphi+c^2\,\text{sin.}^4\varphi},$$

tirée du même paragraphe. On obtiendra ainsi, en faisant sin. $\varphi=x$,

$$\frac{1+x}{bx}\sqrt{1-c^2x^2}=\frac{1+2x-2c^2x^3-c^2x^4}{1-2x+2c^2x^3-c^2x^4};$$

équation pour la quintisection de D, laquelle, étant entièrement développée, montera au degré $12=\frac{25-1}{2}$.

§ 22. Nous venons de voir comment on trouve la relation entre φ_n et φ pour que dig. $(\varphi_n) = n$ dig. φ, n étant un nombre entier. S'il fallait trouver la relation entre φ et ψ pour que dig. $\psi = \frac{m}{n}$ dig. φ, m et n étant entiers, on prendrait un angle auxiliaire ω, tel qu'on eût à la fois n dig. $\psi =$ dig. ω, et m dig. $\varphi =$ dig. ω. La première condition donnerait une équation algébrique entre les sinus des angles ψ et ω; la seconde en donnerait une entre ceux des angles φ et ω : d'où, éliminant ω, on aurait la relation cherchée entre φ et ψ. En général, on pourra toujours satisfaire, par une équation algébrique, à l'équation transcendante

$$m \text{ dig. } \varphi + n \text{ dig. } \psi + p \text{ dig. } \omega + \text{etc.} = o.$$

Pour le démontrer, nous poserons

$$(6). \quad \left\{ \begin{array}{l} m \text{ dig. } \varphi = \text{dig. } \varphi', \\ n \text{ dig. } \psi = \text{dig. } \psi', \\ p \text{ dig. } \omega = \text{dig. } \omega', \\ \text{etc. ;} \end{array} \right.$$

ce qui donnera

$$\text{dig. } \varphi' + \text{dig. } \psi' + \text{dig. } \omega' + \text{etc.} = o.$$

La question sera ramenée à trouver les relations algébriques qui correspondent aux équations précédentes : or, on sait comment il faut s'y prendre pour les premières ; et quant à la dernière, on la décomposera en d'autres qui n'aient que trois termes. Supposons, pour fixer les idées, qu'elle n'en ait elle-même que trois : on posera

$$\text{dig. } (\varphi') + \text{dig. } (\psi') = \text{dig. } \mu',$$

et il viendra

$$\text{dig. } \mu' + \text{dig. } \omega' = o.$$

En chassant μ' des équations algébriques qui correspondent à celles-ci, on obtiendra une résultante algébrique entre les sinus et les cosinus des arcs φ', ψ' et ω'. On la combinera avec les équations algébriques qui répondent aux équations (6), pour éliminer φ', ψ' et ω', et l'équation finale sera la relation demandée.

§ 23. Étant donnés le module c et l'amplitude φ, on peut trouver, par une construction géométrique assez simple, l'amplitude φ_n qui convient à la fonction dig. (c, φ_n) égale à n dig. (c, φ).

Construction. Sur la circonférence, décrite du centre C (*fig.* 3) avec un rayon égal à l'unité, prenez l'arc AM_1 égal à 2φ ou $2\varphi_1$; prenez ensuite, à compter de la même origine A et dans le même sens, l'arc AM_1M_2 égal à $2\varphi_2$; tirez la corde $\overline{M_1M_2}$, et divisez en deux parties égales l'angle AM_1M_2, par une droite $\overline{M_1D}$, qui rencontrera en D le rayon $\overline{AC}$ prolongé. Du point D comme centre, et du rayon $\overline{DO}$, perpendiculaire à la corde $\overline{AM_1}$, décrivez une seconde circonférence qui touchera les deux cordes $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$. Cela posé, si du point M_2, on mène au petit cercle une troisième tangente $\overline{M_2M_3}$, qui rencontre la grande circonférence au point M_3, ce point M_3 déterminera l'arc $AM_1M_2M_3 = 2\varphi_3$, dont la moitié φ_3 servira à la triplication du digamma de φ; de sorte qu'on aura

$$\text{dig.}\,(c, \varphi_3) = 3\ \text{dig.}\,(c, \varphi).$$

De même, si du point M_3, on mène une nouvelle droite $\overline{M_3M_4}$, qui soit à la fois tangente au petit cercle et corde du grand, on connaîtra le point M_4, qui déterminera l'arc $AM_1M_2M_3M_4 = 2\varphi_4$. Continuant ainsi indéfiniment, on formera un polygone, dont chaque côté sera tout à la fois inscrit dans la grande circonférence, et circonscrit à la petite. Ce polygone déterminera, par les sommets M_1, M_2, M_3, etc., de ses angles successifs, tous les arcs $2\varphi_1$, $2\varphi_2$, $2\varphi_3$, etc., dont l'origine est commune en A, et qui, à compter du second, serviront à multiplier le digamma proposé par les nombres 2, 3, 4, 5, etc., jusqu'à telle limite qu'on voudra; d'où il suit que, par une construction géométrique qui n'exige que la règle et le compas, on peut parvenir à déterminer l'amplitude φ_n, qui satisfait à l'équation

$$\text{dig.}\,(c, \varphi_n) = n\ \text{dig.}\,(c, \varphi),$$

n étant un nombre entier quelconque.

Les données dont nous avons fait usage, sont l'amplitude φ, et l'amplitude φ_2 de la fonction double dig. (c, φ_2). Pour construire cette dernière amplitude, nous remarquerons que, par le § 20, on a

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \Delta(\varphi)\ \text{tang.}\,\varphi.$$

Cette expression étant comparée à la valeur de tang. $\varphi' =$ tang. $\varphi\Delta(\psi)$ du § 19, on voit sur le champ que, si l'on prend $\psi = \varphi$, φ' devient égal à $\frac{1}{2}\varphi_2$. Par conséquent, en vertu du même §, on aura la proportion (*fig.* 1)

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\varphi_2 : \overline{mp} :: b : \overline{\mathrm{A}r};$$

ce qui réduit la construction de tang. $\frac{1}{2}\varphi_2$, à celle d'une quatrième proportionnelle, et du rayon vecteur de l'ellipse génératrice.

Démonstration. Pour plus de généralité, nous supposerons qu'après plusieurs circonvolutions du polygone, les deux sommets consécutifs M_2 et M_3, représentent les extrémités des arcs $2\varphi_{n-1}$, $2\varphi_n$. Si le polygone n'avait pas achevé une révolution, pour parvenir du point A au point M_2, l'arc AM_3M_2 serait $2\pi - 2\varphi_{n-1}$; si, pour arriver au même point M_2, le polygone a fait i révolutions, le même arc AM_3M_2 sera

$$2\pi(i+1) - 2\varphi_{n-1}.$$

Dans cette dernière hypothèse, qui s'applique à tous les cas, l'arc AM_3 sera pareillement $2\pi(i+1) - 2\varphi_n$.

Nous dénoterons, pour abréger, par e la distance $\overline{CD}$, et par r le rayon $\overline{DO}$ du petit cercle.

Joignons, $\overline{DM_2}$, $\overline{DM_3}$, $\overline{AM_2}$, $\overline{AM_3}$, pour former les triangles ADM_2, ADM_3, DM_2M_3. Dans le triangle ADM_2, on a, pour les deux côtés $\overline{AD}$ et $\overline{AM_2}$,

$$\overline{AD} = 1 + e, \quad \overline{AM_2} = 2\sin.\tfrac{1}{2}\text{ arc } AM_3M_2 = 2\sin.(\pi i + \pi - \varphi_{n-1})$$
$$= 2\sin.\varphi_{n-1}\cos.\pi i.$$

L'angle compris DAM_2 a pour mesure

$$\tfrac{1}{2}BM_2 = \tfrac{1}{2}(AM_3M_2 - \pi) = \pi i + \frac{\pi}{2} - \varphi_{n-1},$$

et le troisième côté $\overline{DM_2}$, est donné par la formule

$$\begin{aligned}\overline{(DM_2)}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AM_2}^2 - 2\overline{AD} \times \overline{AM_2}\cos.DAM_2\\ &= (1+e)^2 + 4\sin.^2\varphi_{n-1}\\ &\quad - 2(1+e) \times 2\sin.\varphi_{n-1}\cos.\pi i\cos.\left(\pi i + \frac{\pi}{2} - \varphi_{n-1}\right).\end{aligned}$$

Mais

$$\cos.\left(\pi i + \frac{\pi}{2} - \varphi_{n-1}\right) = \cos.\ \pi i\ \sin.\ \varphi_{n-1}\ :$$

donc, en réduisant et en observant que $\cos.^2 \pi i = 1$,

$$\overline{(DM_2)}^2 = (1+e)^2 - 4e\ \sin.^2 \varphi_{n-1}\ ;$$

et semblablement

$$\overline{(DM_3)}^2 = (1+e)^2 - 4e\ \sin.^2 \varphi_n.$$

Avec les deux côtés $\overline{DM_2}$ et $\overline{DM_3}$, que nous appellerons p et q, et le troisième $\overline{M_2M_3} = 2\sin.(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = y$, on trouvera l'aire du triangle DM_2M_3, par la formule connue

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{2y^2(p^2+q^2) - y^4 - (p^2-q^2)^2}.$$

Cette même aire ayant pour expression $\frac{1}{2}\ ry$, on aura

$$4r^2 = 2(p^2+q^2) - y^2 - \frac{(p^2-q^2)^2}{y^2}\ :$$

substituant les valeurs

$$y = 2\sin.\ (\varphi_n - \varphi_{n-1}),$$

$$p^2+q^2 = 2(1+e)^2 - 4e(\sin.^2\varphi_n + \sin.^2\varphi_{n-1}),$$

$$p^2-q^2 = 4e(\sin.^2\varphi_n - \sin.^2\varphi_{n-1}) = 4e\ \sin.(\varphi_n + \varphi_{n-1})\sin.(\varphi_n - \varphi_{n-1}),$$

il viendra

$$4r^2 = 4(1+e)^2 - 8e(\sin.^2\varphi_n + \sin.^2\varphi_{n-1}) - 4\sin.^2(\varphi_n - \varphi_{n-1})$$
$$- 4e^2\sin.^2(\varphi_n + \varphi_{n-1}),$$

ou

$$r^2 = \cos.^2(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + 2e\cos.(\varphi_n - \varphi_{n-1})\cos.(\varphi_n + \varphi_{n-1})$$
$$+ e^2\cos.^2(\varphi_n + \varphi_{n-1});$$

et, en extrayant la racine carrée, on obtient ce résultat très-simple

$$r = \cos.\ (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + e\cos.\ (\varphi_n + \varphi_{n-1}),$$

ou

$$r = (1+e)\cos.\ \varphi_n \cos.\ \varphi_{n-1} + (1-e)\sin.\ \varphi_n \sin.\ \varphi_{n-1}.$$

Maintenant, si l'on se rappelle que l'équation transcendante

$$\text{dig.}\,\mu - \text{dig.}\,\nu = \text{dig.}\,\varphi,$$

est satisfaite par l'équation algébrique (§ 17)

$$\cos.\,\mu \cos.\,\nu + \sin.\,\mu \sin.\,\nu.\,\Delta(\varphi) = \cos.\,\varphi,$$

on voit qu'en faisant $\mu = \varphi_n$, et $\nu = \varphi_{n-1}$, l'équation précédente s'accorde avec la valeur que nous venons de trouver pour r, si l'on a

$$\frac{1-e}{1+e} = \Delta(\varphi), \quad \text{et} \quad \frac{r}{1+e} = \cos.\,\varphi :$$

il nous reste à prouver, que ces deux équations sont précisément celles qui résultent de la construction des quantités r et e.

Puisque l'arc $AM_1 = 2\varphi$, on a $BM_1 = \pi - 2\varphi$, et l'angle A du triangle rectangle ADO est égal à $\frac{1}{2}\pi - \varphi$: donc

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad \overline{AO} = (1+e)\sin.\,\varphi, \quad \overline{DO} = r = (1+e)\cos.\,\varphi.$$

D'un autre côté, la corde $\overline{AM}_1 = 2\sin.\,\varphi$: donc

$$\overline{OM}_1 = \overline{AM}_1 - \overline{AO} = 2\sin.\,\varphi - (1+e)\sin.\,\varphi = (1-e)\sin.\,\varphi,$$

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{tang.}\,OM_1D = \frac{r}{(1-e)\sin.\,\varphi} = \frac{1+e}{1-e}\cot.\,\varphi.$$

Suivant notre construction, l'arc $AM_1M_2 = 2\varphi_2$; et, par conséquent, le reste de la circonférence $AM_3M_2 = 2\pi - 2\varphi_2$; ce qui donne $\pi - \varphi_2$ pour mesure de l'angle AM_1M_2, et $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\varphi_2$ pour mesure de l'angle AM_1D, moitié de AM_1M_2. On a donc

$$\text{tang.}\,AM_1D = \cot.\,\tfrac{1}{2}\varphi_2.$$

Cette valeur de tang. AM_1D, comparée à l'équation (8), donne

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \frac{1-e}{1+e}\,\text{tang.}\,\varphi;$$

mais, comme l'amplitude $\frac{1}{2}\varphi_2$ se détermine par la formule

$$(10). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \Delta(\varphi)\,\text{tang.}\,\varphi,$$

on voit que les équations (9), (10) et (7), s'accordent à donner

$$\frac{1-e}{1+e} = \Delta(\varphi), \text{ et } \frac{r}{1+e} = \cos.\ \varphi\ ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il suit donc de notre construction, que deux sommets consécutifs du polygone indéfini qui en résulte, sont tels que si le point M_2 termine l'arc $2\varphi_{n-1}$, le point suivant M_3 terminera l'arc $2\varphi_n$. Or, dans l'origine de la construction, on a désigné par M_2 le point qui termine l'arc $2\varphi_2$: donc, alors, le point M_3 a dû terminer l'arc $2\varphi_3$; et ainsi, en prolongeant le polygone indéfiniment, on obtient successivement toutes les amplitudes φ_2, φ_3, φ_4, etc., qui servent à la multiplication de la fonction dig. (c, φ), suivant l'équation générale

$$\text{dig.}\ (c, \varphi_n) = n\ \text{dig.}\ (c, \varphi).$$

Nous remarquerons que, pour ne pas tomber dans des cas où la construction deviendrait embarrassante, on pourra toujours se borner au cas, où l'amplitude donnée φ est moindre que $\frac{1}{2}\pi$; car toute amplitude plus grande que $\frac{1}{2}\pi$, peut être représentée par $i\pi \pm \varphi$, φ étant moindre que $\frac{1}{2}\pi$: alors, la fonction correspondante est égale à $2i\mathrm{D}(c) \pm \text{dig.}\ (c, \varphi)$, et cette fonction multipliée par n, devient

$$2ni\mathrm{D}\ (c) \pm \text{dig.}\ (c, \varphi_n).$$

Lorsqu'on prend $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, le rayon du petit cercle r devient nul, et le polygone, dont le premier côté se confond avec le diamètre $\overline{AB}$, a tous ses côtés superposés sur ce même diamètre : alors la construction est sans objet, puisque le digamma proposé est égal à la fonction complète $\mathrm{D}(c)$, et que la valeur $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, donne $\varphi_n = \frac{1}{2}n\pi$.

La construction géométrique que nous venons de donner, appartient à M. Jacobi, professeur à l'université de Kœnigsberg, auteur d'un ouvrage intitulé *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, qui renferme un grand nombre de découvertes importantes dans la branche d'analyse qui nous occupe. Remarquons, que cette construction pourrait servir à trouver la valeur approchée de tout digamma, dont l'amplitude serait donnée, en faisant connaître son rapport avec le digamma complet. En effet, si l'on continue à tracer les différents côtés du polygone, jusqu'à ce qu'on trouve, dans la suite des sommets M_2, M_3, M_4, etc., un point M_n qui soit très-près de

l'une des extrémités du diamètre $\overline{AB}$, il est visible qu'en comptant les circonvolutions du polygone, on saura combien il y a de demi-circonférences dans l'arc $2\varphi_n$, terminé au point M_n. Soit m le nombre de ces demi-circonférences, on aura donc, à très-peu près, $2\varphi_n = m\pi$: par conséquent, dig. (c, φ_n) ou n dig. $(c, \varphi) = mD(c)$, et

$$\text{dig.}\,(c, \varphi) = \frac{m}{n}\,D(c)\,;$$

valeur aisée à évaluer numériquement, au moyen de la table des digamma complets, calculée par Legendre, qui se trouve dans le tome II du *Traité des fonctions elliptiques*, et dans le tome III des *Exercices de calcul intégral* du même auteur. Dans tous les cas, il sera facile de tenir compte de la petite distance qu'il peut y avoir entre le point M_n et l'un des points A et B, pour en déduire une valeur encore plus approchée de la fonction dig. (c, φ_n) ; et, par conséquent, de la fonction proposée dig. (c, φ).

§ 24. M. Jacobi a publié en 1836, dans le *Journal de M. Crelle*, la formule suivante, qui donne le sinus de l'amplitude correspondante à la somme de trois digamma,

$$(f).\quad \left\{\begin{array}{l} \text{sin.amp.}(p)\,\text{sin.amp.}(q) + \text{sin.amp.}(r)\,\text{sin.amp.}(p+q+r) \\ -\text{sin.amp.}(p+r)\,\text{sin.amp.}(q+r) = \\ c^2\,\text{sin.amp.}(p)\,\text{sin.amp.}(q)\,\text{sin.amp.}(r) \\ \times\text{sin.amp.}(p+r)\,\text{sin.amp.}(q+r)\,\text{sin.amp.}(p+q+r). \end{array}\right.$$

Pour la démontrer, nous remarquerons que la formule (a) du § 18, peut s'écrire sous la forme

$$\text{sin. amp.}\,(u+v) = \frac{\text{sin.amp.}(u)\text{cos.amp.}(v)\Delta\text{amp.}(v) + \text{sin.amp.}(v)\text{cos.amp.}(u)\Delta\text{amp.}(u)}{1 - c^2\,\text{sin.}^2\,\text{amp.}\,(u)\,\text{sin.}^2\,\text{amp.}\,(v)}\,;$$

ce qui donne, en posant

$$u = p + r,\quad v = q + r,$$

$$(11)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} \text{sin. amp.}\,(p+q+2r) \times \\ [1 - c^2\,\text{sin.}^2\,\text{amp.}\,(p+r)\,\text{sin.}^2\,\text{amp.}\,(q+r)] = \\ \text{sin. amp.}\,(p+r)\,\text{cos. amp.}\,(q+r)\,\Delta\,\text{amp.}\,(q+r) \\ +\text{sin. amp.}\,(q+r)\,\text{cos. amp.}\,(p+r)\,\Delta\,\text{amp.}\,(p+r). \end{array}\right.$$

Or, si l'on différentie par rapport à r, le produit

$$\Pi = \sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r),$$

on trouve, pour résultat,

$$d\Pi = \left\{\begin{array}{l} \sin.\text{amp.}(p+r)\cos.\text{amp.}(q+r)\,d.\text{amp.}(q+r) \\ +\sin.\text{amp.}(q+r)\cos.\text{amp.}(p+r)\,d.\text{amp.}(p+r) \end{array}\right\},$$

et comme, en général,

$$d.\text{amp.}\,x = dx.\Delta\,\text{amp.}\,x,$$

on a

$$d.\text{amp.}(q+r) = \Delta\,\text{amp.}(q+r)\,dr,$$
$$d.\text{amp.}(p+r) = \Delta\,\text{amp.}(p+r)\,dr.$$

Substituant ces valeurs dans celle de $d\Pi$, on voit sur-le-champ, que $\frac{d\Pi}{dr}$ est égal au second membre de l'équation (11), qui devient, par cette remarque,

$$(12)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{c} \sin.\text{amp.}(p+q+2r) = \\ \dfrac{d.[\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)]}{dr[1-c^2\sin.^2\text{amp.}(p+r)\sin.^2\text{amp.}(q+r)]}. \end{array}\right.$$

Comparant cette expression à l'intégrale générale

$$\int\frac{dx}{1-c^2x^2} = \frac{1}{2c}\log.\left(\frac{1+cx}{1-cx}\right) + \text{const.},$$

on voit que

$$\int\sin.\text{amp.}(p+q+2r)\,dr =$$
$$\frac{1}{2c}\log.\left[\frac{1+c\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)}{1-c\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)}\right] + \text{const.}$$

Pour déterminer la constante arbitraire, je supposerai que l'intégrale précédente s'évanouit quand $r = o$; ce qui est permis, car si l'on développait la fonction sin. amp. $(p+q+2r)$ en série ordonnée suivant les puissances de r, on obtiendrait, en multipliant tous les termes de cette suite par dr et en intégrant, une nouvelle série qui procèderait suivant les puissances de r, et dans laquelle aucun terme ne deviendrait infini par l'hypothèse de $r = o$. Mais cette

même hypothèse, réduit $p+r$ et $q+r$, à p et à q respectivement; et la constante se trouvant déterminée, la formule précédente devient

$$\int \sin.\text{amp.}(p+q+2r)\,dr$$
$$=\frac{1}{2c}\log.\left[\frac{1+c\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)}{1-c\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)}\right]$$
$$-\frac{1}{2c}\log.\left[\frac{1+c\sin.\text{amp.}(p)\sin.\text{amp.}(q)}{1-c\sin.\text{amp.}(p)\sin.\text{amp.}(q)}\right].$$

Dans cette équation, le premier membre ne change pas de valeur tant que la somme $p+q+2r$ reste invariable; ce qui aura lieu, si l'on pose $q=o$, et que l'on remplace en même temps p par $p+q$: il doit donc en être de même du second membre. On conclut de là, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\frac{[1+c\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)]\,[1-c\sin.\text{amp.}(p)\sin.\text{amp.}(q)]}{[1-c\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)]\,[1+c\sin.\text{amp.}(p)\sin.\text{amp.}(q)]}$$
$$=\frac{1+c\sin.\text{amp.}(r)\sin.\text{amp.}(p+q+r)}{1-c\sin.\text{amp.}(r)\sin.\text{amp.}(p+q+r)}.$$

Si l'on représente le premier membre de cette dernière équation, par

$$\frac{P+cQ}{P-cQ},$$

les polynomes P et Q ayant pour valeurs

$$P=1-c^2\sin.\text{amp.}(p)\sin.\text{amp.}(q)\sin.\text{amp}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r),$$
$$Q=\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)-\sin.\text{amp.}(p)\sin.\text{amp.}(q),$$

la comparaison de cette fraction avec le second membre, fournit la relation

$$Q=P\sin.(r)\sin.\text{amp.}(p+q+r);$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule de M. Jacobi.

On peut donner à cette même formule une forme symétrique, en posant

$$w-x=p,\quad y-z=q,\quad x-y=r:$$

elle devient alors

$$\left.\begin{array}{r}\text{sin. amp.}(w-x)\ \text{sin. amp.}(y-z)\\ +\ \text{sin. amp.}(w-y)\ \text{sin. amp}\ (z-x)\\ +\ \text{sin. amp.}(w-z)\ \text{sin. amp.}(x-y)\\ +\ c^2\text{sin. amp.}(w-x)\ \text{sin. amp.}(w-y)\\ \times\ \text{sin. amp.}(w-z)\ \text{sin. amp.}(x-y)\\ \times\ \text{sin. amp.}(y-z)\ \text{sin. amp.}(z-x)\end{array}\right\} = o.$$

§ 25. La fonction digamma jouit d'une propriété, dont nous ferons un fréquent usage dans la suite, et à laquelle les autres fonctions elliptiques participent d'une manière analogue. Cette propriété est exprimée par l'équation

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \sqrt{-1}\ \text{dig.}(b, \varphi'),$$

à laquelle on parvient en posant

$$\text{sin.}\varphi = \sqrt{-1}\ \text{tang.}\varphi', \text{ ou cos.}\varphi = \frac{1}{\text{cos.}\varphi'}.$$

Si l'on fait

$$\text{dig.}(c, \varphi) = p,\ \text{dig.}(c, \psi) = q,\ \text{dig.}(c, \omega) = r,$$
$$\text{dig.}(b, \varphi') = p',\ \text{dig.}(b, \psi') = q',\ \text{dig.}(b, \omega') = r',$$

on voit que l'on pourra changer p, q, r, en

$$p'\sqrt{-1},\ q'\sqrt{-1},\ r'\sqrt{-1},$$

pourvu que l'on remplace, en général, sin. amp. (c, u), par $\sqrt{-1}$ tang. amp. (b, u'). Cette transformation, appliquée à la formule (f), donne pour résultat, en divisant les deux membres par $\sqrt{-1}$, en supprimant les accents, et en permutant les modules b et c,

$$\begin{array}{c}\text{tang. amp.}(p)\ \text{tang. amp.}(q) + \text{tang. amp.}(r)\ \text{tang. amp.}(p+q+r)\\ -\ \text{tang. amp.}(p+r)\ \text{tang. amp.}(q+r) =\\ b^2\ \text{tang. amp.}(p)\ \text{tang. amp.}(q)\ \text{tang. amp.}(r)\\ \times\ \text{tang. amp.}(p+r)\ \text{tang. amp.}(q+r)\ \text{tang. amp.}(p+q+r).\end{array}$$

Dans le cas où $b=1$, les digamma se confondent avec leurs amplitudes, et l'on a la formule trigonométrique

$$\text{tang.}\,\varphi\,\text{tang.}\,\psi+\text{tang.}\,\omega\,\text{tang.}(\varphi+\psi+\omega)-\text{tang.}(\varphi+\omega)\text{tang.}(\psi+\omega)$$
$$=\text{tang.}\,\varphi\,\text{tang.}\,\psi\,\text{tang.}\,\omega\,\text{tang.}(\varphi+\omega)\,\text{tang.}(\psi+\omega)\,\text{tang.}(\varphi+\psi+\omega).$$

§ 26. L'équation $\sin.\varphi=\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,\varphi'$, qui change $p=\text{dig.}(c,\varphi)$ en $p'\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\,\text{dig.}(b,\varphi')$, étant écrite sous la forme

$$\sin.\,\text{amp.}\,(c,p)=\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,\text{amp.}\,(b,p'),$$

si l'on fait $\varphi'=\frac{1}{2}\pi$, on aura $p'=\text{D}(b)$, et (à cause de $p=p'\sqrt{-1}$) $p=\sqrt{-1}\,\text{D}(b)$: donc

$$\sin.\,\text{amp.}[c,\sqrt{-1}\,\text{D}(b)]=\sqrt{-1}\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\pi=\infty.$$

Ce résultat, dû à l'amplitude imaginaire $\sqrt{-1}\,\text{D}(b)$, paraît fort singulier ; mais il n'est qu'un cas particulier de la formule générale

$$\sin.\,\text{amp.}[c,p+\sqrt{-1}\,\text{D}(b)]=\frac{1}{c\sin.\,\text{amp.}\,(c,p)},$$

que nous allons démontrer.

Soit la formule

$$\sin.\,\text{amp.}(p+q)$$
$$=\frac{\sin.\,\text{amp.}\,p\cos.\,\text{amp.}\,q\,\Delta\,\text{amp.}\,q+\sin.\,\text{amp.}\,q\cos.\,\text{amp.}\,p\,\Delta\,\text{amp.}\,p}{1-c^2\sin.^2\text{amp.}\,p\sin.^2\text{amp.}\,q}:$$

si l'on y fait $q=\sqrt{-1}\,\text{D}(b)$, ce qui donne

$$\sin.\,\text{amp.}\,q=\infty,$$
$$\cos.\,\text{amp.}\,q=\sqrt{1-\sin.^2\text{amp.}\,q}=\sqrt{-1}\,\sin.\,\text{amp.}\,q,$$
$$\Delta\,(\text{amp.}\,q)=\sqrt{1-c^2\sin.^2\text{amp.}\,q}=\sqrt{-1}\,c\sin.\,\text{amp.}\,q,$$
$$\cos.\,\text{amp.}\,q\;\Delta\,\text{amp.}\,q=-c\sin.^2\text{amp.}\,q,$$

on aura

$$\sin.\,\text{amp.}\,[p+\sqrt{-1}\,\text{D}(b)]$$
$$=\frac{-c\sin.\,\text{amp.}\,p\sin.^2\text{amp.}\,q+\sin.\,\text{amp.}\,q\cos.\,\text{amp.}\,p\,\Delta\,\text{amp.}\,p}{-c^2\sin.^2\text{amp.}\,p\sin.^2\text{amp.}\,q}$$
$$=\frac{1}{c\sin.\,\text{amp.}\,p}.$$

Cette formule est l'expression d'un théorème fondamental, d'où se déduisent plusieurs propriétés des fonctions elliptiques. On en tire d'abord, en y mettant $p+\sqrt{-1}\,D(b)$ à la place de p,

$$\sin.\text{amp}.[p+2\sqrt{-1}D(b)]=\frac{1}{c\sin.\text{amp}.[p+\sqrt{-1}D(b)]}=\sin.\text{amp}.p;$$

mettant, dans cette équation, $p+2\sqrt{-1}D(b)$ à la place de p, on aura de nouveau

$$\sin.\text{amp}.[p+4\sqrt{-1}D(b)]=\sin.\text{amp}.[p+2\sqrt{-1}D(b)=\sin.\text{amp}.p:$$

donc, en général, m' étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, on aura

(13). . . $\sin.\text{amp}.[p+2m'\sqrt{-1}D(b)]=\sin.\text{amp}.p:$

ainsi, l'on ne change point le sinus de l'amplitude, quand on ajoute au digamma, ou qu'on en retranche, la quantité $2m'\sqrt{-1}D(b)$.

D'un autre côté, quelle que soit l'amplitude, la fonction $p+2D$ pourra être remplacée par dig.$(\varphi+\pi)$; et, puisque $\sin.(\varphi+\pi)=-\sin.\varphi$, il s'ensuit qu'on a, en général,

$$\sin.\text{amp}.(p+2D)=-\sin.\text{amp}.p:$$

donc, en mettant $p+2D$ à la place de p, on aura aussi

$$\sin.\text{amp}.(p+4D)=\sin.\text{amp}.p.$$

De là résultent évidemment les deux formules

$$\sin.\text{amp}.[p+(4m+2)D]=-\sin.\text{amp}.p,$$
$$\sin.\text{amp}.[p+4mD]=\sin.\text{amp}.p,$$

m étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Portons maintenant, dans ces deux formules, $p+2m'\sqrt{-1}D(b)$ à la place de p; et nous aurons, en vertu de l'équation (13), ces deux nouvelles formules

$$\sin.\text{amp}.[p+(4m+2)D+2m'\sqrt{-1}D(b)]=-\sin.\text{amp}.p,$$
$$\sin.\text{amp}.[p+4mD+2m'\sqrt{-1}D(b)]=\sin.\text{amp}.p,$$

qui ont lieu, quels que soient les nombres entiers m et m', positifs ou négatifs, et qui contiennent ainsi une propriété très-générale des fonctions elliptiques de la première espèce.

§ 27. La relation

$$(14) \quad . \; . \; \cos.\varphi \cos.\psi - \sin.\varphi \sin.\psi \sqrt{1 - c^2 \sin.^2\mu} = \cos.\mu,$$

que nous avons obtenue entre les amplitudes, qui entrent dans l'équation transcendante

$$\text{dig.}\,\varphi + \text{dig.}\,\psi = \text{dig.}\,\mu,$$

peut être rapportée à un triangle sphérique.

En effet, dans le triangle quelconque $\varphi\psi\mu$ (*fig.* 4), on a, par les formules connues,

$$\cos.\varphi \cos.\psi + \sin.\varphi \sin.\psi . \cos. M = \cos\mu;$$

équation qui devient semblable à (14), si $\cos. M = -\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\mu}$; ce qui exige que l'angle M soit obtus. On tire de la dernière condition : $c = \frac{\sin. M}{\sin. \mu}$. Par conséquent, *les trois côtés représenteront les trois amplitudes, si, l'angle M étant obtus, son sinus est au sinus du côté opposé, dans le rapport du module à l'unité.* La même condition devrait avoir lieu, dans le cas où l'on aurait

$$\text{dig.}\,\varphi - \text{dig.}\,\psi = \text{dig.}\,\mu;$$

mais alors l'angle M serait aigu.

CHAPITRE IV.

Propriétés générales des epsilon de même module.

§ 28. De même que les digamma, les epsilon peuvent être représentés par des secteurs de courbes polaires. En suivant une marche semblable à celle que nous avons tracée au § 16, on trouve, pour équation de la courbe des epsilon,

$$\rho^2 = 2\Delta(c, \varphi).$$

En appelant B, l'axe de cette courbe qui correspond à $\varphi = o$ (axe que nous supposerons horizontal comme dans la fausse ellipse), et A, l'axe qui correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$B = \sqrt{2}, \quad A = \sqrt{2b}:$$

ainsi, l'axe horizontal est le même, pour la courbe des epsilon, et pour celle des digamma; mais l'axe vertical A est moindre que B; ce qui nous apprend que la courbe, au lieu de s'allonger dans le sens vertical, comme la fausse ellipse, a au contraire une forme aplatie.

Soient φ et ψ deux amplitudes telles, qu'on ait

$$\text{dig.}\,\varphi + \text{dig.}\,\psi = D,$$

ou, ce qui revient au même (§ 19),

$$b\,\text{tang.}\,\varphi\,\text{tang.}\,\psi = 1,$$

$$b = \Delta(\varphi)\,\Delta(\psi):$$

les carrés des rayons vecteurs ρ et ρ', que nous supposerons correspondre respectivement à ces amplitudes, auront pour valeurs

$$\rho^2 = 2\,\Delta(c, \varphi), \quad \rho'^2 = 2\,\Delta(c, \psi);$$

d'où

$$\rho^2 \rho'^2 = 4\Delta(c, \varphi)\Delta(c, \psi) = 4b = A^2 B^2,$$

et, par conséquent,

$$\rho \rho' = AB.$$

Cette égalité est la traduction algébrique de la propriété suivante :

Lorsque deux rayons vecteurs, situés l'un au-dessus et l'autre au-dessous d'un même demi-axe horizontal de la courbe des epsilon, comprennent un angle égal à la somme des amplitudes de deux digamma complémentaires, le rectangle de ces rayons est constant, et équivaut à celui des demi-axes.

Il résulte de la forme aplatie de la courbe des epsilon, qu'on a

$$\text{eps.}\,\varphi < \varphi, \quad \text{eps.}\,\varphi > \varphi\Delta.$$

Si l'on désigne par $R = \frac{b}{\Delta(\varphi)}$ le rayon vecteur de l'ellipse mentionnée au § 16, on aura $\rho^2 = \frac{2b}{R}$: ainsi, l'ellipse génératrice de la courbe des digamma, servira également à la construction de celle des epsilon ; mais nous allons trouver une relation bien plus intime entre cette ellipse et la fonction epsilon.

§ 29. Soient (*fig.* 5)

$$\overline{AC} = \overline{CD} = 1, \quad \overline{CB} = b = \sqrt{1-c^2},$$

l'ellipse ACB aura pour équation

$$y^2 = b^2(1-x^2).$$

Si l'on fait $x = \overline{CP} = \overline{M'E}$ égal à $\sin.\varphi$, et y égal à $b \cos.\varphi = \overline{MP}$, cette équation sera satisfaite, et l'on aura

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi} :$$

ainsi, *tandis que l'arc de cercle M'D représentera l'amplitude* φ, *l'arc d'ellipse MB représentera la fonction eps.* (c, φ).

C'est à cause de cette propriété, que l'on a nommé *fonctions elliptiques*, les transcendantes qui dérivent de la formule générale H du § 8.

L'exactitude de cette dénomination se confirme à l'égard des fonctions de la première espèce, car on prouvera au § 90, que tout digamma peut s'exprimer par deux arcs d'ellipse. Cependant, elle est impropre à l'égard des fonctions de troisième espèce, qui ne peuvent s'exprimer par des epsilon ou par des digamma, que pour certaines valeurs particulières de n, de c, et de φ.

§ 30. La propriété fondamentale des digamma consiste en ce que l'on peut assigner algébriquement l'amplitude de la somme ou de la différence de deux digamma donnés. Les arcs d'ellipse sont, de toutes les autres transcendantes, celles qui approchent le plus de jouir de la même propriété, mais non d'une manière absolue. Ainsi, deux arcs étant donnés sur une ellipse, à partir de l'extrémité du petit axe où $\varphi = o$, on peut trouver algébriquement, non pas un arc égal à leur somme, mais un arc égal à cette somme moins une quantité algébrique; ce qui prouve, que les epsilon sont des fonctions d'une nature plus composée que les digamma. On doit donc regarder ces derniers, comme tenant le premier rang, après les arcs de cercle et les logarithmes.

Soient φ, ψ, et μ, trois amplitudes liées entre elles par l'équation transcendante

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad \text{dig.}\,\varphi + \text{dig.}\,\psi - \text{dig.}\,\mu = o,$$

ou par l'équation

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad \cos.\varphi \cos.\psi - \sin.\varphi \sin.\psi\ \Delta(\mu) = \cos.\mu,$$

qui en est la traduction algébrique. Pour que la propriété, que nous venons d'attribuer aux arcs d'ellipse, soit vraie, il faut que l'on ait

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad \text{eps.}\,\varphi + \text{eps.}\,\psi - \text{eps.}\,\mu = \text{P},$$

P étant une quantité algébrique. Cette équation, différentiée dans l'hypothèse de μ constant, donne

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad \Delta(\varphi)\,d\varphi + \Delta(\psi)\,d\psi = d\text{P}.$$

Changeons simultanément ψ en $-\psi$ dans les équations (1) et (2), et rappelons-nous que

$\text{dig.}(-\psi) = -\text{dig.}\,\psi$, $\cos.(-\psi) = \cos.(\psi)$, $\sin.(-\psi) = -\sin.\,\psi$:

nous obtiendrons, pour transformées,

$$\text{dig.}\,\varphi - \text{dig.}\,\psi - \text{dig.}\,\mu = o,$$

$$\cos.\varphi\cos.\psi + \sin.\varphi\sin.\psi\,\Delta(\mu) = \cos.\mu.$$

Permutons maintenant μ et ψ, dans les deux équations précédentes, et il viendra

$$\text{dig.}\,\varphi - \text{dig.}\,\mu - \text{dig.}\,\psi = o,$$

(5). . . . $\cos.\varphi\cos.\mu + \sin.\varphi\sin.\mu\,\Delta(\psi) = \cos.\psi.$

Changeons dans celles-ci, ψ en $-\psi$: nous trouverons, en observant que $\Delta(-\psi) = \Delta(\psi)$,

(6). . . . $\text{dig.}\,\varphi + \text{dig.}\,\psi - \text{dig.}\,\mu = o,$

tandis que l'équation (5) n'éprouvera aucun changement.

Il suit de l'identité des équations (1) et (6), que les équations (2) et (5) sont également identiques. Et, comme il est permis de permuter φ et ψ dans l'équation (6), on pourra le faire également dans l'équation (5), qui deviendra

(7). . . . $\cos.\psi\cos.\mu + \sin.\psi\sin.\mu\,\Delta(\varphi) = \cos.\varphi.$

Si nous tirons des équations (5) et (7), les valeurs de $\Delta(\varphi)$ et de $\Delta(\psi)$, pour les reporter dans l'équation (4), nous obtiendrons

$$dP = d\varphi\left(\frac{\cos.\varphi - \cos.\psi\cos.\mu}{\sin.\psi\sin.\mu}\right) + d\psi\left(\frac{\cos.\psi - \cos.\varphi\cos.\mu}{\sin.\varphi\sin.\mu}\right),$$

ou, en réduisant le second membre au même dénominateur,

$$dP = \frac{d\varphi(\sin.\varphi\cos.\varphi - \sin.\varphi\cos.\psi\cos.\mu) + d\psi(\sin.\psi\cos.\psi - \sin.\psi\cos.\varphi\cos.\mu)}{\sin.\varphi\sin.\psi\sin.\mu}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}d(\sin.^2\varphi + \sin.^2\psi + 2\cos.\varphi\cos.\psi\cos.\mu)}{\sin.\varphi\sin.\psi\sin.\mu}.$$

Mais de l'équation (2), on déduit, en dégageant $\Delta(\mu)$, puis en élevant les deux membres au carré,

$$1 - c^2 \sin.^2\mu = \left(\frac{\cos.\varphi \cos.\psi - \cos.\mu}{\sin.\varphi \sin.\psi}\right)^2;$$

d'où

$$\sin.^2\varphi + \sin.^2\psi + 2\cos.\mu \cos.\varphi \cos.\psi = 1 + \cos.^2\mu + c^2 \sin.^2\mu \sin.^2\varphi \sin.^2\psi,$$

et, par conséquent,

$$dP = \frac{\frac{1}{2}d(c^2 \sin.^2\mu \sin.^2\varphi \sin.^2\psi)}{\sin.\mu \sin.\varphi \sin.\psi} = c^2 d(\sin.\mu \sin.\varphi \sin.\psi):$$

donc

$$P = c^2 \sin.\mu \sin.\varphi \sin.\psi + \text{const.}$$

Pour déterminer la constante, nous remarquerons que, si l'on porte au lieu de P, la valeur précédente dans l'équation (3), il viendra, en supposant $\varphi = o$,

$$\text{esp.}\,\psi - \text{eps.}\,\mu = \text{const.};$$

mais cette même hypothèse de $\varphi = o$, change l'équation (1) en $\text{dig.}\,\psi - \text{dig.}\,\mu = o$; d'où $\psi = \mu$, et, par conséquent,

$$\text{eps.}\,\psi - \text{eps.}\,\mu = o:$$

ainsi la constante dont il s'agit est nulle, et l'équation (3) devient

$$(8). \quad . \quad . \quad \text{eps.}\,\varphi + \text{eps.}\,\psi - \text{eps.}\,\mu = c^2 \sin.\varphi \sin.\psi \sin.\mu.$$

C'est la formule générale, qui servira à comparer entre eux les epsilon, comme nous avons comparé les digamma.

§ 31. La remarque que nous avons faite au § précédent, sur la nature composée de la fonction epsilon, va se trouver confirmée par la transformation imaginaire de $\sin.\varphi$ en $\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,\psi$. Cette transformation donne sur-le-champ

$$\text{eps.}(c, \varphi) = \sqrt{-1}\int \frac{\Delta(b, \psi)\,d\psi}{\cos.^2\varphi} = \sqrt{-1}\int \frac{1 - b^2 \sin.^2\psi}{1 - \sin.^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{\Delta(b, \psi)}.$$

En comparant cette formule à

$$H = \int \frac{A + B \sin.^2\psi}{1 + n \sin.^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{1 - b^2 \sin.^2\psi}},$$

qui donne (§ 8)

$$H = \frac{B}{n} \text{dig.}\,(b, \psi) + \frac{An - B}{n} \text{kap.}\,(n, b, \psi),$$

il viendra

(9). . . $\text{eps.}\,(c, \psi) = \sqrt{-1}\ [b^2 \text{dig.}\,(b, \psi) + c^2 \text{kap.}\,(-1, b, \psi)]$:

or, on a

$$\text{kap.}\,(-1, b, \psi) = \int \frac{d\varphi}{\cos.^2\psi\, \Delta\,(b, \psi)},$$

intégrale dont la valeur, que l'on trouvera au § 43, est

(10) . $\int \frac{d\psi}{\cos.^2\psi \Delta(b, \psi)} = \text{dig.}(b,\psi) - \frac{1}{c^2} \text{eps.}\,(b, \psi) + \frac{1}{c^2} \Delta(b,\psi) \text{tang.}\,\psi$;

substituant cette valeur dans l'équation (9), il vient, après réduction,

(11) . $\text{eps.}\,(c, \varphi) = \sqrt{-1}\ [\text{dig.}\,(b, \psi) - \text{eps.}\,(b, \psi) + \Delta\,(b, \psi) \text{tang.}\,\psi]$:

ainsi, tandis que la fonction dig. (c, φ) peut s'exprimer au moyen de la seule transcendante dig. (b, ψ), la fonction eps. (c, φ) ne peut s'exprimer qu'à l'aide de deux transcendantes, plus une fonction trigonométrique.

§ 32. Puisque la même amplitude répond à la fois à un epsilon et à un digamma, il s'ensuit que l'on peut regarder l'epsilon comme une fonction du digamma de même amplitude. Posant donc

$$p = \text{dig.}\,\varphi,\quad q = \text{dig.}\,\psi,$$

nous écrirons, au lieu de

$$\text{eps.}\,\varphi,\quad \text{eps.}\,\psi,$$

les symboles

$$\text{eps. amp.}\,p,\quad \text{eps. amp.}\,q,$$

et l'équation (8) prendra la forme

(12). . . . $\text{eps. amp}\,p + \text{eps. amp.}\,q - \text{eps. amp.}\,(p + q)$
$= c^2 \sin.\,\text{amp.}\,p \sin.\,\text{amp.}\,q \sin.\,\text{amp.}\,(p + q)$;

d'où l'on conclura, en général,

$$\text{eps. amp.}\, r + \text{eps. amp.}\,(p+q) - \text{eps. amp.}\,(p+q+r)$$
$$= c^2 \sin.\text{amp.}\, r \sin.\text{amp.}\,(p+q) \sin.\text{amp.}\,(p+q+r).$$

Faisant la somme de ces deux équations, on a

$$\text{eps. amp.}\, p + \text{eps. amp.}\, q + \text{eps. amp.}\, r - \text{eps. amp.}\,(p+q+r)$$
$$= c^2[\sin.\text{amp.}\, p \sin.\text{amp.}\, q \sin.\text{amp.}\,(p+q)$$
$$+ \sin.\text{amp.}\, r \sin.\text{amp.}\,(p+q) \sin.\text{amp.}\,(p+q+r)];$$

formule dans laquelle le second membre n'est pas symétrique, bien que le premier le soit; mais ce second membre le devient, au moyen de la formule générale (f) du § 24, et l'on a

$$\text{eps. amp.}\, p + \text{eps. amp.}\, q + \text{eps. amp.}\, r - \text{eps. amp.}\,(p+q+r) =$$
$$[c^2 \sin.\text{amp.}\,(p+q) \sin.\text{amp.}\,(p+r) \sin.\text{amp.}\,(q+r)] \times$$
$$[1 + c^2 \sin.\text{amp.}\, p \sin.\text{amp.}\, q \sin.\text{amp.}\, r \sin.\text{amp.}\,(p+q+r)].$$

§ 33. On peut développer l'epsilon en fonctions du digamma, au moyen du théorème de Taylor. On aura, en représentant par h l'accroissement de p,

$$\text{eps. amp.}\,(p+h) =$$
$$U + \frac{U'h}{1} + \frac{U''h^2}{1.2} + \frac{U'''h^3}{1.2.3} + \frac{U^{\text{IV}}h^4}{1.2.3.4} + \frac{U^{\text{V}}h^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.},$$

série dans laquelle

$$U = \text{eps. amp.}\, p,\quad U' = \frac{dU}{dp} = \frac{dU}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp},\quad U'' = \frac{dU'}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp},$$
$$U''' = \frac{dU}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp},\quad U^{\text{IV}} = \frac{dU'''}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp},\quad U^{\text{V}} = \frac{dU^{\text{IV}}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dp},\quad \text{etc.}$$

Cherchant la valeur de toutes ces fonctions, dans l'hypothèse de $\varphi = o$, qui donne $p = o$, on obtiendra le développement de eps. amp. h; ou, en écrivant p au lieu de h dans les deux membres,

$$(13)\ldots\ \text{eps. amp.}\, p = p - \frac{c^2 p^3}{3} + (c^2 + c^4)\frac{p^5}{3.5} - \text{etc.};$$

d'où

$$(14)\ldots\ c\,\text{eps.}\,\text{amp.}\,p = cp - \frac{c^3p^3}{3} + (c^3+c^5)\frac{p^5}{3.5} - \text{etc.}$$

$$= \text{arc}\,(\text{tang.} = cp) - \frac{(2c^5-c^3)p^5}{15} + \text{etc.}$$

Quand $c=1$, la formule ci-dessus sera encore convergente, si φ est assez petit; mais pour cette valeur particulière du module, on a

$$\text{eps.}\,\varphi = \sin.\,\varphi,\quad p = \text{dig.}\,\varphi = \log.\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\ (\S\ 19):$$

la différence entre cette valeur rigoureuse de esp.φ, et celle que donne la formule (14), servira à faire apprécier jusqu'à quelle limite on peut compter sur une approximation suffisante.

§ 34. Considérons les trois équations

$$G(\varphi) = \text{eps.}\,\varphi + k\,\text{dig.}\,\varphi,$$
$$G(\psi) = \text{eps.}\,\psi + k\,\text{dig.}\,\psi,$$
$$G(\mu) = \text{eps.}\,\mu + k\,\text{dig.}\,\mu,$$

dans lesquelles G représente, comme on le voit, une fonction composée d'un epsilon et d'un digamma, et k un coefficient constant : il est visible qu'on aura

$$G(\varphi) + G(\psi) - G(\mu) = c^2 \sin.\,\varphi \sin.\,\psi \sin.\,\mu;$$

de sorte que toutes les conséquences qu'on tirera de l'équation (8), pour les fonctions epsilon, s'appliqueront généralement aux fonctions G.

Désignons, comme précédemment, par φ_2, φ_3, φ_4, etc., les amplitudes qui donnent dig. $(\varphi_2) = 2$ dig. (φ), dig. $(\varphi_3) = 3$ dig. (φ), etc.: on aura, en vertu de l'équation (8),

$$2\text{eps.}\varphi - \text{eps.}\varphi_2 = c^2 \sin.\varphi \sin.\varphi \sin.\varphi_2,$$

$$3\text{eps.}\varphi - \text{eps.}\varphi_3 = c^2 \sin.\varphi\,(\sin.\varphi \sin.\varphi_2 + \sin.\varphi_2 \sin.\varphi_3),$$

$$4\text{eps.}\varphi - \text{eps.}\varphi_4 = c^2 \sin.\varphi\,(\sin.\varphi \sin.\varphi_2 + \sin.\varphi_2 \sin.\varphi_3 + \sin.\varphi_3 \sin.\varphi_4),$$

. . . . . :

donc, la même relation entre φ_n et φ, qui donne dig. $\varphi_n = n$ dig. φ, donnera n esp. φ — eps. φ_n, égal à une quantité algébrique.

En général, si m, n, p, etc., sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, on peut faire en sorte que le polynome

$$m.\,\text{eps.}\,\varphi + n\,\text{eps.}\,\psi + p.\,\text{eps.}\,\omega + \text{etc.},$$

soit égal à une quantité algébrique, pourvu qu'il existe entre les angles φ, ψ, ω, etc., la relation qui donne

$$(15).\quad . \quad . \quad . \quad m\,\text{dig.}\,\varphi + n\,\text{dig.}\,\psi + p\,\text{dig.}\,\omega + \text{etc.} = o,$$

relation que nous avons discutée au § 22. En effet, si nous désignons par A, A′, A″, etc., des quantités purement algébriques, nous aurons, d'après ce qu'on vient de voir,

$$m\,\text{eps.}\,\varphi - \text{eps.}\,\varphi_m = \text{A},\ n\,\text{eps.}\,\psi - \text{eps.}\,\psi_n = \text{A}',\ p\,\text{eps.}\,\omega - \text{eps.}\,\omega_p = \text{A}'',\text{etc.};$$

d'où

$$(m\,\text{eps.}\,\varphi + n\,\text{eps.}\,\psi + p\,\text{eps.}\,\omega + \text{etc.})$$
$$-(\text{eps.}\,\varphi_m + \text{eps.}\,\psi_n + \text{eps.}\,\omega_p + \text{etc.}) = \text{A} + \text{A}' + \text{A}'' + \text{etc.};$$

mais, d'après l'équation (8), le polynome

$$\text{eps.}\,\varphi_m + \text{eps.}\,\psi_n + \text{eps.}\,\omega_p + \text{etc.},$$

sera égal à une quantité algébrique, si

$$\text{dig.}\,\varphi_m + \text{dig}\,\psi_n + \text{dig.}\,\omega_p + \text{etc.} = o:$$

or, cette dernière équation revient à

$$m\,\text{dig.}\,\varphi + n\,\text{dig.}\,\psi + p\,\text{dig.}\,\omega + \text{etc.} = o,$$

qui n'est autre que l'équation (15).

Si l'on fait $\varphi = \psi$ dans l'équation (8), on aura

$$2\,\text{eps.}\,\varphi - \text{eps.}\,\mu = c^2 \sin.^2\varphi\,\sin.\,\mu,$$

et la relation algébrique correspondante, sera

$$\cos.^2\varphi - \sin.^2\varphi\,\Delta\,(\mu) = \cos.\,\mu.$$

C'est l'équation qui sert à la duplication des arcs d'ellipse, ou à leur bisection. On en tire, pour la duplication (§20),

$$\sin.\mu = \frac{2\sin.\varphi\cos.\varphi\Delta(\varphi)}{1-c^2\sin.^4\varphi},\ \tang.\tfrac{1}{2}\mu = \Delta(\varphi)\tang.\varphi;$$

et pour la bisection,

$$\sin.\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos.\mu}{1+\Delta(\mu)}}.$$

§ 35. Lorsque les amplitudes φ et ψ correspondent à des digamma complémentaires, on a

$$\text{dig.}\mu = \text{D},\quad \mu = \frac{\pi}{2},\quad \text{eps.}\,\mu = \text{E},$$

et l'équation (8) devient

$$(16).\ \ldots\ldots\ \text{eps.}\varphi + \text{eps.}\psi - \text{E} = c^2\sin.\varphi\sin.\psi,$$

tandis que les équations algébriques correspondantes, sont (§ 19)

$$b\tang.\varphi\tang.\psi = 1,$$

$$\sin.\psi = \frac{\cos.\varphi}{\Delta(\varphi)},\quad \cos.\psi = \frac{b\sin.\varphi}{\Delta(\varphi)},\quad \Delta(\psi) = \frac{b}{\Delta(\varphi)}.$$

Si, d'après ces dernières relations, on détermine sur l'ellipse (*fig.* 5), les arcs BM = eps. φ, BN = eps. ψ, on aura, en observant que l'on peut permuter φ et ψ dans l'équation (16), et, par conséquent, dans toutes celles qui en découlent,

$$(17).\ \ldots\ \text{eps.}\varphi - (\text{E} - \text{eps.}\psi) = \text{BM} - \text{AN} = c^2\sin.\varphi\sin.\psi$$

$$= \frac{c^2\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{c^2\sin.\psi\cos.\psi}{\Delta(\psi)}.$$

L'amplitude ψ se détermine géométriquement avec facilité au moyen du rayon vecteur $\overline{\text{CF}}$. En effet, d'après le § 16, on a

$$\overline{\text{CF}} = \frac{b}{\Delta(\varphi)};$$

et comme $\overline{M'E} = \sin.\varphi$, en remplaçant $\frac{b}{\Delta(\varphi)}$ et $\sin.\varphi$ par ces valeurs, dans l'équation $\cos.\psi = \frac{b \sin.\varphi}{\Delta(\varphi)}$, il vient, en observant que $\overline{CD} = 1$,

$$\cos.\psi = \frac{\overline{CF} \times \overline{M'E}}{\overline{CD}}.$$

Une propriété remarquable du point N, déterminé par suite de la construction de l'angle ψ, c'est que *la différence des arcs BM et AN, est égale à la partie de la tangente $\overline{OM}$ ou $\overline{ZN}$, terminée à la perpendiculaire $\overline{CO}$ ou $\overline{CZ}$ abaissée du centre de l'ellipse.* Ce théorème, dont la découverte est due à *Fagnani*, peut se démontrer de la manière suivante :

On sait, par la géométrie analytique, que si

$$Y = \alpha X + \beta,$$

est l'équation d'une droite $\overline{MO}$, la longueur de la perpendiculaire $\overline{CO}$, est représentée par

$$(18) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \overline{CO} = \frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Si la droite $\overline{MO}$ est tangente à l'ellipse, elle a pour équation

$$Y = -\frac{b^2 x}{y} X + \frac{b^2}{y},$$

x et y désignant les coordonnées du point de contact ; d'où il suit que

$$\alpha = -\frac{b^2 x}{y}, \quad \beta = \frac{b^2}{y},$$

ou, en mettant pour x et y leurs valeurs $\sin.\varphi$ et $b \cos.\varphi$,

$$\alpha = -\frac{b \sin.\varphi}{\cos.\varphi}, \quad \beta = \frac{b}{\cos.\varphi}:$$

par conséquent

$$\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{b}{\Delta(\varphi)},$$

et, en vertu de l'équation (18),

$$(19) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \overline{CO}^2 = \frac{b^2}{\Delta^2(\varphi)}.$$

Mais le triangle rectangle CMP, fournit la relation

$$\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + y^2 = \sin.^2\varphi + b^2 \cos.^2\varphi;$$

et comme

$$\overline{MO}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{CO}^2,$$

on a

$$\overline{MO}^2 = \sin.^2\varphi + b^2\cos.^2\varphi - \frac{b^2}{\Delta^2} = 1 - c^2\cos.^2\varphi - \frac{b^2}{\Delta^2}$$

$$= \frac{\Delta^2 - \Delta^2 c^2 \cos.^2\varphi - b^2}{\Delta^2} = \frac{c^4 \sin.^2\varphi \cos.^2\varphi}{\Delta^2};$$

d'où

$$\overline{MO} = \frac{c^2 \sin.\varphi \cos.\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Le point N étant situé par rapport à l'angle ψ, comme le point M par rapport à φ, si l'on change φ en ψ dans la formule précédente, on changera $\overline{MO}$ en $\overline{NZ}$; ce qui donnera

$$\overline{NZ} = \frac{c^2 \sin.\psi \cos.\psi}{\Delta(\psi)};$$

valeur égale à celle de $\overline{MO}$, en vertu de l'équation (17).

§ 36. Voici une propriété nouvelle des arcs AN et BM :

Le rectangle des rayons vecteurs $\overline{CG}$ et $\overline{CF}$, est équivalent à celui des demi-axes $\overline{AC}$ et $\overline{CB}$.

En effet l'on a

$$\overline{CF} = \frac{b}{\Delta(\varphi)}, \quad \overline{CG} = \frac{b}{\Delta(\psi)}:$$

faisant le produit et remplaçant $\Delta(\varphi)\Delta(\psi)$ par sa valeur b, il vient

$$\overline{CF} \times \overline{CG} = 1 \times b = \overline{AC} \times \overline{CB}.$$

On peut remarquer aussi que $\overline{CF} = \overline{CO}$, en vertu de l'équation (19): on trouverait pareillement que $\overline{CG} = \overline{CZ}$.

En remplaçant AN par sa valeur AB—BN, on a simultanément

$$BM + BN = AB + \overline{MO},$$
$$\overline{CF} \times \overline{CG} = \overline{AC} \times \overline{CB} :$$

il résulte de ces deux équations, que le théorème de Fagnani peut s'énoncer de la manière suivante : *si les arcs d'ellipse BM et BN, sont tels que le rectangle des rayons vecteurs correspondants $\overline{CF}$ et $\overline{CG}$, équivaut à celui des demi-axes, les deux arcs valent en somme le quart de l'ellipse, plus la ligne $\overline{MO}$.*

Lorsque φ et ψ sont égaux à un même angle θ, dans l'équation (16), les deux points M et N coïncident en K. Alors on a

$$\text{tang.}^2\theta = \frac{1}{b}, \quad \sin.^2\theta = \frac{1}{1+b}, \quad \cos.^2\theta = \frac{b}{1+b};$$

ce qui donne

$$BK - AK = 1 - b :$$

donc la différence des arcs BK, AK, est égale à la différence des demi-axes $\overline{CA}$ et $\overline{CB}$. En même temps, si l'on remplace AK par E—BK dans l'équation précédente, il vient

$$BK = \tfrac{1}{2}E + \tfrac{1}{2}(1-b),$$
$$AK = \tfrac{1}{2}E - \tfrac{1}{2}(1-b) :$$

il y a donc au point K, une sorte de bisection du quart d'ellipse.

Nous démontrerons au § 60, la relation entre les quatre fonctions $D(b)$, $D(c)$, $E(b)$, $E(c)$, exprimée par la formule suivante

$$\frac{\pi}{2} = D(c)\,E(b) + D(b)\,E(c) - D(c)\,D(b).$$

CHAPITRE V.

Propriétés générales des kappa de même module et de même amplitude.

§ 37. Lorsque dans la formule

$$H = \int \frac{A + B \sin.^2\varphi}{1 + n \sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta},$$

la constante n, qui porte le nom de *paramètre*, n'est pas égale à zéro, nous avons trouvé (§ 8), en opérant la division du numérateur par le dénominateur,

$$H = \frac{B}{n} \int \frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{An - B}{n} \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\Delta};$$

ce qui a donné lieu à une troisième espèce de transcendantes dont le type est

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\Delta}.$$

Nous avons nommé cette fonction, le *kappa* de φ, et représenté par K, ou K (n, c), l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + n \sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

On pourrait croire que le cas où n est imaginaire, diffère essentiellement du cas où n est réel, et qu'il constitue une quatrième espèce de fonctions elliptiques; mais, par des réductions et des transformations que nous exposerons ci-après, on verra que cette qua-

trième espèce est inutile à considérer, et qu'on peut ainsi restreindre la troisième espèce aux seuls cas où n est réel.

Provisoirement, nous partagerons en quatre classes, les kappa à paramètre réel. La première se composera de ceux dont le paramètre est positif, et, par conséquent, de la forme

$$n = \cot.^2\theta.$$

La seconde contiendra ceux dont le paramètre est négatif, compris entre $-c^2$ et -1, et, par conséquent, de la forme

$$n = -1 + b^2 \sin.^2\theta.$$

La troisième renfermera ceux dont le paramètre est négatif, compris entre zéro et $-c^2$, et, par conséquent, de la forme

$$n = -c^2 \sin.^2\theta.$$

La quatrième contiendra ceux dont le paramètre est négatif, compris entre -1 et $-\infty$, et, par conséquent, de la forme

$$n = -\frac{1}{\sin.^2\theta}.$$

Les deux fonctions kap. $(-c^2, c, \varphi)$, kap. $(-1, c, \varphi)$, sont exclues de ces quatre classes. En effet, nous verrons au § 43, que ces fonctions se réduisent à des transcendantes d'un ordre inférieur aux kappa.

§ 38. Faisons voir maintenant, que les deux premières classes peuvent se fondre en une. Soit, à cet effet,

$$p = \frac{\sin.\varphi \cos.\varphi}{\Delta},$$

et k un coefficient indéterminé : on aura, par la différentiation,

$$\frac{dp}{1+kp^2} = \frac{1 - 2\sin.^2\varphi + c^2\sin.^4\varphi}{1 + (k-c^2)\sin.^2\varphi - k\sin.^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Si l'on fait ensuite

$$1 + (k-c^2)\sin.^2\varphi - k\sin.^4\varphi = (1 + n\sin.^2\varphi)(1 + m\sin.^2\varphi),$$

il en résultera

$$k = -mn,\ (1+n)\ (1+m) = b^2,$$

et l'équation différentielle prendra la forme

$$\frac{dp}{1+kp^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\left(\frac{1+n}{n}\cdot\frac{1}{1+n\sin.^2\varphi} + \frac{1+m}{m}\cdot\frac{1}{1+m\sin.^2\varphi} + \frac{c^2}{mn}\right);$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$(1).\ \ldots\ \frac{1+n}{n}\,\text{kap.}(n, c, \varphi) + \frac{1+m}{m}\,\text{kap.}(m, c, \varphi)$$

$$= \frac{-c^2}{mn}\,\text{dig.}\,\varphi + \frac{1}{\sqrt{-mn}}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{\sqrt{-mn}\,\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta}\right).$$

Par cette formule, les deux kappa peuvent être réduits l'un à l'autre, pourvu qu'entre les paramètres n et m, on ait la relation

$$(1+n)\ (1+m) = b^2.$$

Cette relation est telle, que si l'on fait $n = \cot.^2\theta$, on aura

$$m = -1 + b^2\sin.^2\theta;$$

par où l'on voit, que *les deux premières classes de kappa, n'en font à proprement parler qu'une seule*, puisque la réduction d'une fonction à l'autre, peut se faire immédiatement au moyen de la formule

$$(a)\ \ldots\ \text{kap.}(\cot.^2\theta, c, \varphi) = \frac{b^2\sin.^2\theta\cos.^2\theta}{\Delta^2(b,\theta)}\,\text{kap.}(-1+b^2\sin.^2\theta, c, \varphi)$$

$$+ \frac{c^2\sin.^2\theta}{\Delta^2(b,\theta)}\,\text{dig.}\,\varphi + \frac{\sin.\theta\cos.\theta}{\Delta(b,\theta)}\,\text{arc}\left[\text{tang.} = \frac{\sin.\varphi\cos.\varphi\,\Delta(b,\theta)}{\text{tang.}\,\theta\,\Delta(c,\varphi)}\right],$$

qui est ce que devient l'équation (1), quand on y remplace m et n, par leurs valeurs $-1 + b^2\sin.^2\theta$ et $\cot.^2\theta$.

§ 39. Les deux dernières classes de kappa peuvent aussi se fondre en une. Pour le démontrer, soit

$$p = \frac{\text{tang.}\,\varphi}{\Delta},$$

et α une constante indéterminée : on trouve par la différentiation

$$\frac{dp}{1+\alpha p^2} = \frac{d\varphi}{\Delta} \cdot \frac{1-c^2\sin.^4\varphi}{(1-c^2\sin.^2\varphi)\cos.^2\varphi+\alpha\sin.^4\varphi}.$$

Supposons que le dénominateur $\Delta^2\cos.^2\varphi+\alpha\sin.^4\varphi$, soit égal au produit des deux facteurs

$$(1+n\sin.^2\varphi)\left(1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right):$$

la valeur de α devra être

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha = (1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right),$$

et alors, l'équation différentielle se décomposant ainsi

$$\frac{dp}{1+\alpha p^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\left(\frac{1}{1+\sin.^2\varphi} + \frac{1}{1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi} - 1\right),$$

son intégrale sera

$$(b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{kap.}(n, c, \varphi) + \text{kap.}\left(\frac{c^2}{n}, c, \varphi\right)$$

$$= \text{dig.}\,\varphi + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{\sqrt{\alpha}\,\text{tang.}\,\varphi}{\Delta}\right).$$

Si l'on fait $n = -c^2\sin.^2\theta$, ou $n = -\frac{1}{\sin.^2\theta}$, l'équation (2) devient

$$\alpha = (1-c^2\sin.^2\theta)\left(1-\frac{1}{\sin.^2\theta}\right) = -\Delta^2(\theta)\cot.^2\theta,$$

et la formule (b) se change en

$$(c) \quad . \quad . \quad . \quad \text{kap.}(-c^2\sin.^2\theta, c, \varphi) + \text{kap.}\left(-\frac{1}{\sin.^2\theta}, c, \varphi\right)$$

$$= \text{dig.}\,\varphi + \frac{1}{\sqrt{-1}\,\Delta(\theta)\cot.\theta}\,\text{arc}\left[\text{tang.} = \frac{-\sqrt{-1}\,\Delta(\theta)\cot.\theta\,\text{tang.}\,\varphi}{\Delta(\varphi)}\right].$$

En représentant par u la fonction qui contient des imaginaires, nous lui donnerons une forme réelle au moyen de la relation connue

$$2x\sqrt{-1} = \log.\left(\frac{1+\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,x}{1+\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,x}\right),$$

et nous obtiendrons

$$(3)\ \ldots\ u = \frac{\text{tang.}\,\theta}{2\Delta(\theta)}\log.\left(\frac{\Delta(\varphi)\,\text{tang.}\,\theta+\Delta(\theta)\,\text{tang.}\,\varphi}{\Delta(\varphi)\,\text{tang.}\,\theta-\Delta(\theta)\,\text{tang.}\,\varphi}\right).$$

Cette expression donnera un résultat réel, aussi longtemps que $\Delta(\varphi)$ tang.θ surpassera $\Delta(\theta)$ tang.φ; c'est-à-dire, depuis $\varphi=o$, jusqu'à $\varphi=\theta$, le logarithme qu'elle contient devenant nul à la première limite et infini à la seconde. Mais lorsque $\Delta(\varphi)$ tang.θ sera moindre que $\Delta(\theta)$ tang. φ, elle prendra une forme imaginaire, et pour la rectifier, conformément à la remarque du § 10, nous devrons changer le signe du dénominateur. Elle servira, alors, depuis $\varphi=\theta$ jusqu'à $\varphi=\frac{\pi}{2}$: à cette dernière limite, elle s'évanouira, et la formule (c) donnera, entre les fonctions complètes, la relation

$$(4)\ \ldots\ \mathrm{K}(-c^2\sin.^2\theta, c)+\mathrm{K}\left(-\frac{1}{\sin.^2\theta},\ c\right) = \mathrm{D};$$

d'où l'on voit que les logarithmes ont entièrement disparu.

§ 40. Remarquons que si l'on fait $n=\cot.^2\theta$, ou $n=-1+b^2\sin.^2\theta$, dans l'équation (2), α prend une valeur positive, et la formule (b) contient un arc de cercle. Au contraire, si l'on fait $n=-c^2\sin.^2\theta$, ou $n=\frac{-1}{\sin.^2\theta}$, α devient négatif, et la formule (b) contient un logarithme. C'est pourquoi, nous appellerons *kappa circulaires*, ceux qui ont pour type du paramètre $n=\cot.^2\theta$ ou $n=-1+b^2\sin^2\theta$; et *kappa logarithmiques*, ceux qui ont pour type du paramètre $n=-c^2\sin.\theta$, ou $n=\frac{-1}{\sin.^2\theta}$. Un examen plus approfondi des fonctions de troisième espèce, nous fera connaître que ces deux classes de kappa sont essentiellement irréductibles entre elles.

Il résulte des formules (a) et (c), que le paramètre de tous les kappa circulaires peut être ramené au type $-1+b^2\sin.^2\lambda$, que nous considérerons comme normal; et celui des kappa logarithmi-

ques, au type $n = -c^2 \sin.^2\lambda$. Nous appellerons *kappa circulaires normaux*, ceux du premier type, et *kappa logarithmiques normaux*, ceux du second.

Pour abréger la notation, nous conviendrons de désigner par kac.(λ, c, φ), le kappa circulaire normal, dont λ est l'angle du paramètre; et par kal. (λ, c, φ), le kappa logarithmique normal correspondant au même angle λ; ce qui s'exprimera par les équations

$$\text{kac.}\ (\lambda, c, \varphi) = \text{kap.}\ (-1 + b^2 \sin.^2\lambda,\ c,\ \varphi),$$
$$\text{kal.}\ (\lambda, c, \varphi) = \text{kap.}\ (-c^2 \sin.^2\lambda,\ c,\ \varphi).$$

Il est inutile d'étendre cette notation aux kappa complets, car nous démontrerons plus tard (chap. VI), que ceux-ci se réduisent toujours à des fonctions de la première et de la seconde espèce.

§ 41. Si dans l'équation de condition du § 38

$$(1 + n)(1 + m) = b^2,$$

on fait $m = -c^2 \sin.^2\theta$, il viendra

$$n(\cos.^2\theta + b^2 \sin.^2\theta) = -c^2 \cos.^2\theta;$$

d'où il suit que n sera de la forme $n = -c^2 \sin.^2\lambda$, et que l'on aura, entre θ et λ, les relations réciproques

$$\sin.\ \lambda = \frac{\cos.\ \theta}{\Delta(\theta)},\quad \sin.\ \theta = \frac{\cos.\lambda}{\Delta(\lambda)};$$

d'où résulte

$$1 = b \tang.\ \theta \tang.\ \lambda.$$

C'est la même relation qui donne

$$\text{dig.}\ \theta + \text{dig.}\ \lambda = \text{D}.$$

En substituant, au lieu de m et de n, les valeurs précédentes dans l'équation (1), on voit que l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{-mn}} \text{ arc} \left(\tang. = \frac{\sqrt{-mn} \sin.\ \varphi \cos.\ \varphi}{\Delta} \right),$$

garde sa forme imaginaire, puisque $mn = c^4 \sin.^2\theta \sin.^2\lambda$. C'est un

résultat qu'il était aisé de prévoir, puisque les deux kappa sont logarithmiques. Si l'on réduit cette expression à une forme réelle, l'équation (1) devient

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos.^2\theta \,\mathrm{kal.}(\theta, c. \varphi) + \cos.^2\lambda \,\mathrm{kal.}(\lambda, c, \varphi)$$

$$= \mathrm{dig.}\,\varphi - \tfrac{1}{2}\sin.\theta \sin.\lambda \log.\left(\pm \frac{\Delta + c^2 \sin.\theta \sin.\lambda \sin.\varphi \cos.\varphi}{\Delta - c^2 \sin.\theta \sin.\lambda \sin.\varphi \cos.\varphi}\right);$$

formule au moyen de laquelle on pourra exprimer l'un par l'autre, les deux kappa logarithmiques

$$\mathrm{kal.}(\theta, c, \varphi), \quad \mathrm{kal.}(\lambda, c, \varphi),$$

pourvu qu'entre les angles des paramètres, on ait la relation

$$1 = b \,\mathrm{tang.}\,\theta \,\mathrm{tang.}\,\lambda.$$

Cette même relation entre les angles des paramètres des deux fonctions

$$\mathrm{kap.}\left(\frac{-1}{\sin.^2\theta}, c, \varphi\right), \quad \mathrm{kap.}\left(\frac{-1}{\sin.^2\lambda}, c, \varphi\right),$$

donne la formule

$$\cos.^2\theta \,\mathrm{kap.}\left(\frac{-1}{\sin.^2\theta}, c, \varphi\right) + \cos.^2\lambda \,\mathrm{kap.}\left(\frac{-1}{\sin.^2\lambda}, c, \varphi\right)$$

$$= -\frac{c^2 \,\mathrm{dig.}\,\varphi}{\sin.^2\theta \sin.^2\lambda} - \tfrac{1}{2}\sin.\theta \sin.\lambda \log.\left(\pm \frac{\Delta \sin.\theta \sin.\lambda - \sin.\varphi \cos.\varphi}{\Delta \sin.\theta \sin.\lambda + \sin.\varphi \cos.\varphi}\right).$$

Si $\theta = \lambda$, d'où

$$\sin.^2\theta = \frac{1}{1+b}, \quad \mathrm{dig.}\,\theta = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{D},$$

la formule (5) donne

$$\mathrm{kap.}(-1+b, c, \varphi) = \frac{1+b}{2b}\,\mathrm{dig.}\,\varphi - \frac{1}{4b}\log.\left(\pm \frac{(1-b)\sin.\varphi\cos.\varphi + \Delta}{(1-b)\sin.\varphi\cos.\varphi - \Delta}\right):$$

ainsi, dans ce cas, la fonction de troisième espèce se réduit à un digamma, moins un logarithme.

§ 42. Appliquée aux kappa, la transformation imaginaire qui se fait au moyen de l'équation

$$\sin.\varphi = \sqrt{-1}\,\text{tang.}\,\psi\,,$$

offre cette particularité remarquable, qu'en même temps que le module se change en son complément, le kappa proposé de logarithmique devient circulaire, et *vice versâ :* ainsi l'on obtient

$$(d)\ \ldots\ \text{kal.}\,(\lambda, c, \varphi) = \frac{\sqrt{-1}}{\Delta^2(c, \lambda)}\,[\text{dig.}\,(b, \psi) - c^2 \sin.^2\lambda\,\text{kac.}\,(\lambda, b, \psi)].$$

C'est à l'aide de cette formule, que nous sommes parvenu à étendre aux kappa circulaires, la propriété démontrée plus haut, d'après Legendre, pour les kappa logarithmiques. Si l'on change sin. φ en $\sqrt{-1}$ tang. ψ dans la formule (5), qui suppose

$$(6).\ \ldots\ \begin{cases} \text{dig.}\,(c, \theta) + \text{dig.}\,(c, \lambda) = \text{D}(c)\,, \\ 1 = b\,\text{tang.}\,\theta\,\text{tang.}\,\lambda\,, \\ \sin.\lambda = \dfrac{\cos.\theta}{\Delta(c, \theta)}\,,\ \sin.\theta = \dfrac{\cos.\lambda}{\Delta(c, \lambda)}\,, \end{cases}$$

et si l'on observe que

$$\log.\left(\frac{\Delta(b, \psi) + c^2 \sin.\theta \sin.\lambda\,\text{tang.}\,\psi\sqrt{-1}}{\Delta(b, \psi) - c^2 \sin.\theta \sin.\lambda\,\text{tang.}\,\psi\sqrt{-1}}\right)$$
$$= 2\sqrt{-1}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{c^2 \sin.\theta \sin.\lambda\,\text{tang.}\,\psi}{\Delta(b, \psi)}\right),$$

on trouvera la relation

$$\frac{\cos.^2\theta}{\Delta^2(c, \theta)}\,[\text{dig.}\,(b, \psi) - c^2 \sin.^2\theta\,\text{kac.}\,(\theta, b, \psi)]$$
$$+ \frac{\cos.^2\lambda}{\Delta^2(c, \lambda)}\,[\text{dig.}\,(b, \psi) - c^2 \sin.^2\lambda\,\text{kac.}\,(\lambda, b, \psi)]$$
$$= \text{dig.}\,(b, \psi) - \sin.\theta \sin.\lambda\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{c^2 \sin.\theta \sin.\lambda\,\text{tang.}\,\psi}{\Delta(b, \psi)}\right).$$

Écrivant φ au lieu de ψ dans les deux membres de cette équation, et y permutant ensuite b et c, ainsi que dans les formules (6), on obtiendra le système de relations suivant

$$\text{dig.}(b,\theta) + \text{dig.}(b,\lambda) = \text{D}(b), \quad 1 = c\,\text{tang.}\,\theta\,\text{tang.}\,\lambda,$$

$$\text{kac.}(\theta, c, \varphi) + \text{kac.}(\lambda, c, \varphi) =$$

$$\text{dig.}(c,\varphi) + \frac{1}{b^2 \sin.\theta \sin.\lambda}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{b^2 \sin.\theta \sin.\lambda\,\text{tang.}\,\varphi}{\Delta(c,\varphi)}\right).$$

§ 43. L'équation (b) offre plusieurs corollaires importants.

1° Elle permet de réduire les kappa circulaires, qui ont pour type du paramètre $n = \cot.^2\theta$, à d'autres kappa, dont le paramètre, également positif, est exprimé par le type moins général $n = c \sin.\theta$. En effet, cette équation faisant dépendre kap. (n, c, φ) de kap. $(\frac{c^2}{n}, c, \varphi)$, il s'ensuit que, si le paramètre n est plus grand que c, c'est-à-dire de la forme $c + \delta^2$, δ^2 étant une quantité essentiellement positive, le paramètre

$$\frac{c^2}{n} = \frac{c}{1 + \frac{\delta^2}{c}},$$

sera nécessairement moindre que c, et, par conséquent, de la forme $n = c \sin.\theta$.

2° En l'appliquant aux cas de $n = c$ et de $n = -c$, elle donne

$$\text{kap.}(\pm c, c, \varphi) = \tfrac{1}{2}\,\text{dig.}\,\varphi + \frac{1}{2(1 \pm c)}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{(1 \pm c)\,\text{tang.}\,\varphi}{\Delta}\right):$$

ainsi, dans ces deux cas, la fonction de troisième espèce se réduit immédiatement à un digamma.

3° En l'appliquant aux cas de $n = -c^2$ et de $n = -1$, dans lesquels α s'évanouit et l'intégrale $\int \frac{dp}{1+\alpha p^2}$ du § 39 se réduit à p, la formule (b) donne

$$\text{kap.}(-c^2, c, \varphi) + \text{kap.}(-1, c, \varphi) = \text{dig.}\,\varphi + \frac{\text{tang.}\,\varphi}{\Delta}:$$

de plus, le deux kappa s'intègrent séparément par des digamma et

des epsilon. En effet, la formule (6) du § 14 donne, pour ces deux cas,

$$\text{kap.}(-c^2, c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2}\,\text{eps.}\,\varphi - \frac{c^2}{b^2}\,\frac{\sin.\,\varphi\cos.\,\varphi}{\Delta},$$

$$\text{kap.}(-1, c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta\cos.^2\varphi} = \text{dig.}\,\varphi - \frac{1}{b^2}\,\text{eps.}\,\varphi + \frac{1}{b^2}\,\Delta\,\text{tang.}\,\varphi.$$

§ 44. Passons maintenant aux kappa dont le paramètre est imaginaire. Soit

$$p = \frac{\sin.\,\varphi\cos.\,\varphi}{(1+\zeta\sin.^2\varphi)\,\Delta},$$

ζ étant un coefficient constant : on aura, en différentiant et en introduisant un second coefficient constant k, l'équation générale

$$\frac{dp}{1+kp^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\cdot\frac{1-(2+\zeta)\sin.^2\varphi+(1+2\zeta)c^2\sin.^4\varphi-\zeta c^2\sin.^6\varphi}{(1+\zeta\sin.^2\varphi)^2(1-c^2\sin.^2\varphi)+k\sin.^2\varphi(1-\sin.^2\varphi)},$$

que l'on pourra écrire sous la forme

$$(7).\ \frac{dp}{1+kp^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\cdot\frac{\zeta-(2\zeta+\zeta^2)\sin.^2\varphi+(\zeta+2\zeta^2)c^2\sin.^4\varphi-\zeta^2c^2\sin.^6\varphi}{\zeta[(1+\zeta\sin.^2\varphi)^2(1-c^2\sin.^2\varphi)+k\sin.^2\varphi(1-\sin.^2\varphi)]},$$

en multipliant à la fois le numérateur et le dénominateur de la fraction qui compose le second membre, par le coefficient ζ. Posons

$$(8).\ \frac{dp}{1+kp^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\left(\frac{M}{\zeta}+\frac{A}{1+n\sin.^2\varphi}+\frac{B}{1+n'\sin.^2\varphi}+\frac{C}{1+m\sin.^2\varphi}\right),$$

M, A, B, C, n, n' et m étant des coefficients indéterminés : en identifiant les deux valeurs précédentes de $\frac{dp}{1+kp^2}$, on trouvera d'abord, par la comparaison des dénominateurs, les trois équations de condition

$$(9).\ \ldots\ \begin{cases} nn'm = -c^2\zeta^2, \\ (1+n)(1+n')(1+m) = b^2(1+\zeta)^2, \\ (c^2+n)(c^2+n')(c^2+m) = -b^2c^2k, \end{cases}$$

qui détermineront le paramètre m et les deux coefficients ζ et k, lors-

que les paramètres n et n' seront connus. On en tirera, pour valeur de ζ,

$$(10)\ .\ \zeta = \frac{-b^2 \pm \sqrt{\left[\frac{1+n}{n} \cdot \frac{1+n'}{n'} \cdot (c^2+n)(c^2+n')\right]}}{b^2 + c^2 . \frac{1+n}{n} \cdot \frac{1+n'}{n'}};$$

ensuite on aura m et k par les équations

$$(11). \ldots\ldots\ m = -\frac{c^2\zeta^2}{nn'},$$

$$(12). \ldots\ldots\ k = -(c^2+n)(c^2+n') . \frac{c^2+m}{b^2c^2}.$$

Quant aux coefficients M, A, B et C, on les déduira de la comparaison des numérateurs, en égalant les coefficients des mêmes puissances de $\sin.^2\varphi$. Et d'abord, il est aisé de voir que $M = 1$, car si l'on fait $\sin.\ \varphi = \infty$ dans les facteurs qui multiplient $\frac{d\varphi}{\Delta_1}$ dans les équations (7) et (8), le premier de ces facteurs se réduit à $\frac{1}{\zeta}$, et le second à $\frac{M}{\zeta}$. La valeur $M = 1$ étant substituée dans l'équation (8), on aura l'identité

$$(13). \begin{cases} \zeta - (2\zeta + \zeta^2)\sin.^2\varphi + (\zeta + 2\zeta^2)c^2\sin.^4\varphi - \zeta^2c^2\sin.^6\varphi \\ = 1 + A\zeta + B\zeta + C\zeta \\ + (n+n'+m+A\zeta n'+A\zeta m+B\zeta n+B\zeta m+C\zeta n+C\zeta n')\sin.^2\varphi \\ + (nn'+nm+n'm+A\zeta n'm+B\zeta nm+C\zeta nn')\sin.^4\varphi \\ + nn'm\sin.^6\varphi; \end{cases}$$

d'où l'on conclura

$$(14)\ldots \begin{cases} A = \dfrac{n^3 + (2+\zeta)n^2 + (1+2\zeta)c^2n + \zeta c^2}{n(n-n')(n-m)}, \\ B = \dfrac{n'^3 + (2+\zeta)n'^2 + (1+2\zeta)c^2n' + \zeta c^2}{n'(n'-n)(n'-m)}, \\ C = \dfrac{m^3 + (2+\zeta)m^2 + (1+2\zeta)c^2m + \zeta c^2}{m(m-n)(m-n')}. \end{cases}$$

Si l'on intègre maintenant les deux membres de l'équation (8), il viendra

$$(15).\int\frac{dp}{1+kp^2}=\frac{1}{\zeta}\text{dig.}\varphi+\text{Akap.}(n,c,\varphi)+\text{Bkap.}(n',c,\varphi)+\text{Ckap.}(m,c,\varphi);$$

formule qui servira à déterminer l'un des trois kappa en fonction des deux autres. Elle contient, comme cas particuliers, la formule (b), en faisant $m=-1$, $n'=\frac{c^2}{n}$; et la formule (a), en faisant $m=o$, $n=\cot.^2\theta$, $n'=-1+b^2\sin.^2\theta$. Mais elle est susceptible d'une infinité d'autres applications, qui peuvent répandre un nouveau jour sur la théorie des fonctions elliptiques de la troisième espèce. Si l'on prend les paramètres n et n', tous deux de la forme $-1+b^2\sin.^2\mu$, le troisième m sera de la même forme; si on les prend tous deux de la forme $-c^2\sin.^2\lambda$, le troisième m sera également de cette forme; mais si l'on supposait n et n', l'un de la forme $-1+b^2\sin.^2\mu$, l'autre de la forme $-c^2\sin.^2\lambda$, on trouverait pour le troisième m, une quantité imaginaire. En effet, si dans l'expression de ζ, on écrit au lieu de n et de n' les valeurs $-1+b^2\sin.^2\mu$, $-c^2\sin.^2\lambda$, il vient

$$\zeta=\frac{\sqrt{-1}\,\Delta(b,\mu)\sin.^2\lambda\,[\sqrt{-1}\,\Delta(b,\mu)\pm\sin.\mu\cos.\mu\cot.\lambda\,\Delta(c,\lambda)]}{\Delta^2(b,\mu)\sin.^2\lambda+\Delta^2(c,\lambda)\sin.^2\mu};$$

quantité dont le carré est essentiellement imaginaire; d'où il suit que $m=-\frac{c^2\zeta^2}{nn'}$ est également imaginaire. Ce résultat était facile à prévoir: car si l'expression de m se rapportait à la forme $-1+b^2\sin.^2\alpha$, il s'ensuivrait que le kappa, dont le paramètre est $-c^2\sin.^2\lambda$, pourrait s'exprimer par les deux kappa dont les paramètres sont $-1+b^2\sin.^2\mu$ et $-1+b^2\sin^2.\alpha$; ce qui est contraire à la nature de ces fonctions. De même, si m se rapportait à la forme $-c^2\sin.^2\alpha$, alors le kappa dont le paramètre est $-1+b^2\sin.^2\mu$, pourrait s'exprimer par les deux kappa dont les paramètres sont $-c^2\sin.^2\lambda$ et $-c^2\sin.^2\alpha$; ce qui est également impossible.

Puisque, dans l'hypothèse précédente, la valeur de m doit toujours être imaginaire, il paraît s'ensuivre que *tout kappa dont le paramètre est imaginaire, peut s'exprimer par deux autres kappa dont les paramètres sont réels, l'un étant de la forme* $-1+b^2\sin.^2\mu$, *l'au-*

tre de la forme — $c^2 \sin.^2 \lambda$. C'est ce que nous allons démontrer, d'après Legendre, avec tous les développements qu'exige cette proposition, l'une des plus importantes de la théorie des fonctions elliptiques.

§ 45. Soit le paramètre donné

$$n = \nu(\cos.\theta + \sqrt{-1}.\sin.\theta),$$

ν étant positif et $\cos.\theta$ pouvant être positif ou négatif à volonté : ce paramètre sera toujours accompagné, dans l'intégrale réelle dont on cherche l'expression, d'un autre paramètre (§ 12)

$$n' = \nu(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta).$$

D'après ces deux données, il faut trouver la valeur de chacune des fonctions kap. (n, c, φ), kap. $(n' c, \varphi)$, exprimée par deux autres kappa dont les paramètres sont réels.

Pour cela, il ne s'agit que de substituer les valeurs de n et n' dans les formules (10), (11) et (12). Soit, pour abréger,

$$h = \frac{b^2\nu}{\nu^2 + 2c^2\nu\cos.\theta + c^2},$$

on trouvera

$$\zeta = -\nu h \pm \nu\sqrt{1 + 2h\cos.\theta + h^2},$$

$$m = -\frac{c^2\zeta^2}{\nu^2} = -c^2\left[2h^2 + 2h\cos.\theta + 1 \mp 2h\sqrt{1 + 2h\cos.\theta + h^2}\right],$$

$$k = -(c^4 + 2c^2\nu\cos.\theta + \nu^2)\frac{c^2 + m}{b^2c^2};$$

par où l'on voit que les trois quantités ζ, m, k sont toujours réelles. Il en est de même du coefficient C, dont la valeur donnée par la troisième des équations (14), est

$$C = \frac{m^3 + (2 + \zeta)m^2 + (1 + 2\zeta)c^2m + \zeta c^2}{m(m^2 - 2m\nu\cos.\theta + \nu^2)};$$

mais les coefficients A et B contiennent chacun une partie imaginaire.

§ 46. Il y a deux valeurs de ζ, et, par conséquent, deux de m, et deux des autres coefficients. Les valeurs de m méritent une attention particulière, parce qu'elles sont les paramètres réels des kappa par lesquels nous voulons exprimer les fonctions kap.(n, c, φ), kap.$(n'c, \varphi)$, dont les paramètres sont imaginaires.

Soient m' et m'' les deux valeurs de m : on aura

$$m' + c^2 = -2hc^2\left[h + \cos.\theta - \sqrt{1 + 2h\cos.\theta + h^2}\right],$$

$$m'' + c^2 = -2hc^2\left[h + \cos.\theta + \sqrt{1 + 2h\cos.\theta + h^2}\right];$$

de là résulte

$$(m' + c^2)(m'' + c^2) = -4c^4h^2\sin.^2\theta:$$

il faut donc que des deux facteurs $m' + c^2$, $m'' + c^2$, l'un soit positif et l'autre négatif. Remarquons maintenant que m' et m'' sont tous deux négatifs, et que si l'on remplace n et n' par leurs valeurs, dans la seconde des équations (9), celle-ci devient

$$(1 + 2\nu\cos.\theta + \nu^2)(1 + m) = b^2(1 + \zeta)^2;$$

expression dont la réalité exige que $1 + m'$ soit toujours positif, ainsi que $1 + m''$; mais pour satisfaire à toutes ces conditions, il suffira de prendre

$$m' = -c^2\sin.^2\lambda, \quad m'' = -1 + b^2\sin.^2\mu.$$

Cela posé, en partant de la valeur $m' = -c^2\sin.^2\lambda$, et en désignant par un accent placé au bas de la lettre, les valeurs correspondantes de p, ζ, k, C, A et B, on déduira de l'équation (15),

$$(16). \ldots \int\frac{dp_,}{1 + k_,p_,^2} - \frac{1}{\zeta_,}\,\text{dig.}\,\varphi - C_,\,\text{kap.}\,(m', c, \varphi)$$

$$= \int\left(\frac{A_,}{1 + n\sin.^2\varphi} + \frac{B_,}{1 + n'\sin.^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$= \int\frac{A_, + B_, + (A_,n' + B_,n)\sin.^2\varphi}{(1 + n\sin.^2\varphi)(1 + n'\sin.^2\varphi)}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Écrivant au lieu de n et de n' leurs valeurs

$$n = \nu(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta), \quad n' = \nu(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta),$$

et faisant, pour abréger,

$$f' = A_{,} + B_{,,}$$
$$g' = A_{,}n' + B_{,}n,$$

le second membre de l'équation précédente deviendra

$$\int \frac{f' + g'\sin.^2\varphi}{1 + 2\nu\cos.\theta\sin.^2\varphi + \nu^2\sin.^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Soit aussi

$$c^4 + 2c^2\nu\cos.\theta + \nu^2 = \tau^2,$$

les équations

$$k_{,} = -(c^4 + 2c^2\nu\cos.\theta + \nu^2)\frac{c^2 + m'^2}{b^2c^2},$$
$$m' = -c^2\sin.^2\lambda,$$

donnent

$$k_{,} = -\frac{\tau^2\cos.^2\lambda}{b^2}:$$

par conséquent

$$\int \frac{dp_{,}}{1 + k_{,}p_{,}^2} = \frac{b}{2\tau\cos.\lambda}\log.\left(\pm\frac{p_{,}\tau\cos.\lambda + b}{p_{,}\tau\cos.\lambda - b}\right),$$

et l'équation (16) devient

$$(17) \ldots\ldots \int \frac{f' + g'\sin.^2\varphi}{1 + 2\nu\cos.\theta\sin.^2\varphi + \nu^2\sin.^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}$$
$$= \frac{b}{2\tau\cos.\lambda}\log.\left(\pm\frac{p_{,}\tau\cos.\lambda + b}{p_{,}\tau\cos.\lambda - b}\right)$$
$$- \frac{1}{\xi_{,}}\,\text{dig.}\,\varphi - C_{,}\,\text{kap.}\,(m', c, \varphi).$$

Si l'on part maintenant de la valeur $m'' = -1 + b^2 \sin.^2\mu$, et que l'on désigne par deux accents placés au bas de la lettre, les quantités correspondantes, on aura

$$(18) \ldots \int \frac{dp_{,,}}{1+k_{,,}p_{,,}^2} - \frac{1}{\zeta_{,,}} \text{dig.}\,\varphi - C_{,,} \text{kap.}\,(m'', c, \varphi)$$
$$= \int \frac{A_{,,} + B_{,,} + (A_{,,}n' + B_{,,}n) \sin.^2\varphi}{(1+n \sin.^2\varphi)\,(1+n' \sin.^2\varphi)} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Soit toujours

$$c^4 + 2c^2\nu \cos.\,\theta + \nu^2 = \tau^2,$$

les équations

$$k_{,,} = -\,(c^4 + 2c^2\nu \cos.\,\theta + \nu^2)\,\frac{c^2 + m''^2}{b^2c^2},$$
$$m'' = -\,1 + b^2 \sin.^2\mu,$$

donnent

$$k_{,,} = \frac{\tau^2 \cos.^2\mu}{c^2},$$

et conséquemment

$$\int \frac{dp_{,,}}{1+k_{,,}p_{,,}^2} = \frac{c}{\tau \cos.\,\mu} \text{ arc} \left(\text{tang.} = \frac{p_{,,}\tau \cos.\,\mu}{c}\right):$$

faisant de plus, par analogie,

$$f'' = A_{,,} + B_{,,},$$
$$g'' = A_{,,}n' + B_{,,}n,$$

l'équation (18) devient

$$(19) \ldots \int \frac{f'' + g'' \sin.^2\varphi}{1 + 2\nu \cos.\,\theta \sin.^2\varphi + \nu^2 \sin.^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}$$
$$= \frac{c}{\tau \cos.\,\mu} \text{ arc} \left(\text{tang.} = \frac{p_{,,}\tau \cos.\,\mu}{c}\right)$$
$$- \frac{1}{\zeta_{,,}} \text{dig.}\,\varphi - C_{,,} \text{kap.}\,(m'', c, \varphi).$$

§ 47. Il faut remarquer que toutes les quantités qui entrent dans les formules (17) et (19) sont réelles de leur nature, à l'exception des quatre coefficients f', g', f'', g'', dans l'expression desquels entrent les paramètres imaginaires n et n', et les coefficients $A_{,}$, $B_{,}$, $A_{,,}$, $B_{,,}$, également imaginaires. Mais cette exception n'est qu'apparente, et l'on peut même calculer les quatre coefficients dont il s'agit, sans connaître les valeurs de $A_{,}$, $B_{,}$, $A_{,,}$, $B_{,,}$.

Soient, à cet effet,

$$f = A + B,$$
$$g = An' + Bn,$$

f', g', f'', g'' seront alors ce que deviennent f et g quand on remplace successivement m par ses deux valeurs m' et m'', dans les coefficients A et B. Lorsqu'on égale les coefficients des mêmes puissances de $\sin.^2\varphi$ dans l'identité (13), on obtient les deux équations de condition

$$1 + \zeta(A + B + C) = \zeta,$$
$$-(2\zeta + \zeta^2) = n + n' + m + A\zeta n' + A\zeta m + B\zeta n + B\zeta m + C\zeta n + C\zeta n',$$

dont la combinaison donne

$$f = A + B = 1 - \frac{1}{\zeta} - C,$$
$$g = An' + Bn = m(C - 1) - (n + n')\left(C + \frac{1}{\zeta}\right) - 2 - \zeta;$$

valeurs essentiellement réelles, puisque

$$n + n' = 2\nu \cos.\theta.$$

§ 48. Au moyen des deux formules (17) et (19), toute intégrale proposée

$$\int \frac{\alpha + \beta \sin.^2\varphi}{1 + 2\nu \cos.\theta \sin.^2\varphi + \nu^2 \sin.^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta},$$

dans laquelle le dénominateur $1 + 2\nu \cos.\theta \sin.^2\varphi + \nu^2 \sin.^4\varphi$ est le produit des deux facteurs imaginaires

$$1 + \nu \sin.^2\varphi(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta),\quad 1 + \nu \sin.^2\varphi(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta),$$

pourra toujours s'exprimer par les deux fonctions kap. (m', c, φ), kap. (m'', c, φ), dont les paramètres sont réels, l'un étant de la forme $-c^2 \sin^2\lambda$, l'autre de la forme $-1 + b^2 \sin.^2\mu$. En effet, connaissant les coefficients f' g', f'', g'', α, β, il sera aisé de satisfaire à l'identité

$$\alpha + \beta \sin.^2\varphi = M'(f' + g' \sin.^2\varphi) + M''(f'' + g'' \sin.^2\varphi),$$

où M' et M'' sont des coefficients constants, par lesquels on multipliera les équations (17) et (19), afin qu'en ajoutant les produits, le premier membre soit égal à l'intégrale proposée.

§ 49. Il est bon de prévenir une difficulté que pourrait offrir l'équation (17), relativement au terme

$$\int \frac{dp_,}{1 + k_, p_,^2} = \frac{b}{2\tau \cos.\lambda} \log. \left(\pm \frac{p_, \tau \cos.\lambda + b}{p_, \tau \cos.\lambda - b} \right).$$

Puisqu'on a

$$p_, = \frac{\sin.\varphi \cos.\varphi}{(1 + \zeta_, \sin.^2\varphi)\Delta},$$

on voit que $p_,$ est nul lorsqu'on a $\varphi = o$ ou $\varphi = 90°$, et que $p_,$ est infini lorsque $\sin.\varphi = \sqrt{\frac{-1}{\zeta_,}}$; valeur qui suppose $\zeta_,$ négatif. Or, cette hypothèse ne peut jamais avoir lieu, car nous avons établi ci-dessus les équations (9), en supposant identique l'équation

$$\begin{aligned}(20) \ldots\ldots\ & (1 + \zeta_, \sin.^2\varphi)^2 (1 - c^2 \sin.^2\varphi) + k_, \sin.^2\varphi \cos.^2\varphi \\ &= (1 + n \sin.^2\varphi)(1 + n' \sin.^2\varphi)(1 + m' \sin.^2\varphi) \\ &= (1 + 2\nu \cos.\theta \sin.^2\varphi + \nu^2 \sin.^4\varphi)(1 - c^2 \sin.^2\lambda \sin.^2\varphi),\end{aligned}$$

dont le second membre est toujours positif, quelque valeur que l'on donne à sin. φ, depuis $\varphi = o$ jusqu'à $\varphi = 90°$: donc le premier membre est également positif. Mais l'hypothèse de $1 + \zeta_, \sin^2\varphi = o$, réduit l'équation précédente à

$$k_, \sin.^2\varphi \cos.^2\varphi = (1 + 2\nu \cos.\theta \sin.^2\varphi + \nu^2 \sin.^4\varphi)(1 - c^2 \sin.^2\lambda \sin.^2\varphi),$$

et si l'on met au lieu de $k_,$ sa valeur $-\frac{\tau^2 \cos.^2\lambda}{b^2}$, on voit que le premier membre devient négatif; ce qui prouve l'inadmissibilité de l'hypothèse.

Non-seulement $p_{,}$ n'est jamais infini, mais on ne saurait avoir $p_{,} = \frac{b}{\tau \cos. \lambda}$; ce qui rendrait infini le logarithme qui entre dans l'équation (17). En effet, si l'on divise tous les termes de l'équation (20), par $(1 + \zeta_{,} \sin.^2\varphi)^2\Delta^2$, on obtient

$$1 + \frac{k_{,} \sin.^2\varphi \cos.^2\varphi}{(1+\zeta_{,}\sin.^2\varphi)^2\Delta^2} = \frac{(1+2\nu\cos.\theta\sin.^2\varphi+\nu^2\sin.^4\varphi)(1-c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi)}{(1+\zeta_{,}\sin.^2\varphi)^2\Delta^2},$$

et comme

$$\frac{k_{,}\sin.^2\varphi\cos.^2\varphi}{(1+\zeta_{,}\sin.^2\varphi)^2\Delta^2} = k_{,}p_{,}^2,$$

il s'ensuit que $1 + k_{,}p_{,}^2$ est toujours positif. Mettant au lieu de $k_{,}$ sa valeur rapportée ci-dessus, on en conclura que $b^2 - p_{,}^2\tau^2\cos.^2\lambda$ est positif, et, par conséquent, aussi $b - p_{,}\tau\cos.\lambda$: donc, on a toujours $p_{,} < \frac{b}{\tau\cos.\lambda}$; ce qu'il fallait prouver.

Si nous passons à l'examen de la formule (19), nous verrons que la quantité

$$p_{,,} = \frac{\sin.\varphi\cos.\varphi}{(1+\zeta_{,,}\sin.^2\varphi)\Delta},$$

qui est nulle lorsque $\varphi = o$ et lorsque $\varphi = 90^\circ$, devient infinie entre ces deux limites, si le coefficient $\zeta_{,,}$ est plus grand que l'unité. En effet, ce coefficient ayant pour valeur

$$-\nu h - \nu\sqrt{1 + 2h\cos.\theta + h^2},$$

est essentiellement négatif, et s'il est plus grand que l'unité, son produit par $\sin.^2\varphi$ pourra annuler le dénominateur de $p_{,,}$. Lorsqu'on aura donc

$$1 + \zeta_{,,}\sin.^2\varphi = o, \quad \text{ou } \sin.^2\varphi = -\frac{1}{\rho_{,,}},$$

l'arc dont la tangente est $\frac{p_{,,}\tau\cos.\mu}{c}$ qui entre dans la formule (19), sera $\frac{1}{2}\pi$, et l'amplitude φ continuant à croître depuis

$$\varphi = \text{arc}\left(\sin. = \sqrt{\frac{-1}{\zeta_{,,}}}\right),$$

jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, cet arc croîtra depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à

$$\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{\tau \cos.\mu}{c} \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}\pi.\cos.\frac{1}{2}\pi}{(1+\zeta_{,,})\,b}\right),$$

qu'il faudra prendre égal à π, pour suivre la loi de continuité.

§ 50. Si l'on regarde la fonction kap.(n, c, φ), comme le secteur mixtiligne, compris entre l'arc d'une certaine courbe (que nous nommerons, pour ce motif, *courbe des kappa*) et les deux rayons vecteurs qui le terminent, nous aurons, en suivant la notation employée au § 16,

$$\rho^2 = \frac{2}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta},$$

pour équation polaire de la courbe. Lorsque les kappa que l'on considère appartiennent à des types normaux, cette courbe se construit avec assez d'élégance, au moyen de deux ellipses.

Soient E, E′, E″ trois ellipses, dont les carrés des demi-axes et des excentricités ont pour valeurs respectives

$$\begin{array}{lll} a^2 = 1, & a'^2 = 1, & a''^2 = 1, \\ b^2 = b^2, & b'^2 = b^2\sin.^2\lambda, & b''^2 = 1 - c^2\sin.^2\lambda, \\ c^2 = c^2. & c'^2 = 1 - b^2\sin.^2\lambda. & c''^2 = c^2\sin.^2\lambda. \end{array}$$

L'angle φ et les rayons vecteurs r, r', r'', étant pris comme au § 16, nous aurons

$$r = \frac{b}{\Delta(c,\varphi)},\quad r' = \frac{b'}{\Delta(c',\varphi)},\quad r'' = \frac{b''}{\Delta(c'',\varphi)};$$

de manière qu'il viendra, pour la courbe des kappa circulaires normaux,

$$\rho^2 = \frac{2}{(1-c'^2\sin.^2\varphi)\,\Delta(c,\varphi)} = \frac{2}{\Delta^2(c',\varphi).\Delta(c,\varphi)} = 2\frac{r'^2}{b'^2}\cdot\frac{r}{b};$$

et pour celle des kappa logarithmiques normaux

$$\rho^2 = \frac{2}{(1-c''^2\sin.^2\varphi)\,\Delta(c,\varphi)} = \frac{2}{\Delta^2(c'',\varphi).\Delta(c,\varphi)} = 2\frac{r''^2}{b''^2}\cdot\frac{r}{b}:$$

ainsi *la courbe de tout kappa normal, pourra se construire au moyen des rayons vecteurs de deux ellipses ayant même grand axe.*

En rapprochant la valeur de ρ, de celle du rayon vecteur R de la *fausse ellipse* (§ 16), il est aisé de voir que l'on a respectivement, suivant que le kappa est circulaire ou logarithmique,

$$\rho = \frac{Rr'}{b'}, \text{ ou } \rho = \frac{Rr''}{b''};$$

relation remarquable par sa simplicité.

§ 51. Pour trouver la valeur du grand et du petit axe (2A et 2B) de la courbe des kappa normaux, il faut faire successivement

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ et } \varphi = o,$$

dans son équation. On trouve de cette manière :

Pour les kappa circulaires normaux,

$$A = \sqrt{\frac{2}{b^3 \sin.^2\lambda}}, \quad B = \sqrt{2};$$

et pour les kappa logarithmiques normaux,

$$A = \sqrt{\frac{2}{b\,\Delta^2(c, \lambda)}}, \quad B = \sqrt{2}.$$

En appliquant à ces fonctions la remarque du § 19, relative aux secteurs de la fausse ellipse, on trouvera de la même manière :

Pour les kappa circulaires normaux

$$\text{kac.}(\lambda, c, \varphi) < \frac{\varphi}{[1 - \Delta^2(b, \lambda) \sin.^2\varphi]\,\Delta}, \quad \text{et} > \varphi;$$

et pour les kappa logarithmiques normaux,

$$\text{kal.}(\lambda, c, \varphi) < \frac{\varphi}{(1 - c^2 \sin.^2\lambda \sin.^2\varphi)\,\Delta}, \quad \text{et} > \varphi.$$

CHAPITRE VI.

Propriétés générales des kappa de même paramètre et de même module. — Théorème sur les kappa complets. — Relations entre l'amplitude et l'angle du paramètre. — Propriété des fonctions complètes des deux premières espèces.

---

§ 52. Considérons les deux fonctions semblables

$$\text{kap.}\,\varphi = \int \frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta(\varphi)}, \quad \text{kap.}\,\psi = \int \frac{d\psi}{(1+n\sin.^2\psi)\Delta(\psi)},$$

et supposons, comme nous l'avons fait pour les epsilon, qu'on ait l'équation

$$\text{dig.}\,\varphi + \text{dig.}\,\varphi - \text{dig.}\,\mu = o,$$

μ étant une amplitude constante. Si l'on fait

$$\text{kap.}\,\varphi + \text{kap.}\,\psi - \text{kap.}\,\mu = \text{Q},$$

on aura

$$\text{Q} = \int \left(\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\,\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{(1+n\sin.^2\psi)\,\Delta(\psi)} \right);$$

mais puisque

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = o,$$

il vient

$$\text{Q} = \int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \cdot \frac{n(\sin.^2\psi - \sin.^2\varphi)}{1+n(\sin.^2\psi + \sin.^2\varphi) + n^2\sin.^2\psi\sin.^2\varphi};$$

et comme on a

$$\Delta^2(\varphi) - \Delta^2(\psi) = c^2\,(\sin.^2\psi - \sin.^2\varphi)\,,$$

en posant

$$\sin.^2\psi + \sin.^2\varphi = p\,,\ \sin.\,\psi\,\sin.\,\varphi = q\,,$$

on obtient

$$Q = \frac{n}{c^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\cdot\frac{\Delta^2(\varphi)-\Delta^2(\psi)}{1+np+n^2q}\,.$$

Remarquons que

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\,[\Delta^2(\varphi)-\Delta^2(\psi)] = d\varphi\,\Delta(\varphi) - \frac{d\varphi\,\Delta^2(\psi)}{\Delta(\varphi)} = d\varphi\,\Delta(\varphi) + d\psi\,\Delta(\psi)\,;$$

et comme on a trouvé au § 30,

$$d\varphi\,\Delta(\varphi) + d\psi\,\Delta(\psi) = c^2 d\,(\sin.\mu\,\sin.\,\varphi\,\sin.\,\psi) = c^2\,\sin.\mu\,dq\,,$$

l'intégrale précédente se réduit à

$$Q = \int\frac{n\,\sin.\,\mu\,dq}{1+np+n^2q^2}\,.$$

La relation dig. φ + dig. ψ — dig. $\mu = o$, suppose la suivante

$$\cos.\,\varphi\,\cos.\,\psi = \cos.\,\mu + \sin.\,\varphi\,\sin.\,\psi\,\Delta(\mu)\,;$$

d'où

$$\cos.^2\varphi\,\cos.^2\psi = \cos.^2\mu + 2\cos.\,\mu\,\sin.\,\varphi\,\sin.\,\psi\,\Delta(\mu)$$
$$+ \sin.^2\varphi\,\sin.^2\psi - c^2\,\sin.^2\varphi\,\sin.^2\psi\,\sin.^2\mu.$$

Mais

$$\cos.^2\varphi\,\cos.^2\psi = (1-\sin.^2\varphi)\,(1-\sin.^2\psi)$$
$$= 1-(\sin.^2\varphi+\sin.^2\psi)+\sin.^2\varphi\,\sin.^2\psi = 1-p+q^2\,:$$

par conséquent

$$1-p = \cos.^2\mu + 2q\,\cos.\,\mu\,\Delta(\mu) - c^2q^2\,\sin.^2\mu\,,$$

et

$$p = \sin.^2\mu - 2q\,\cos.\,\mu\,\Delta(\mu) + c^2q^2\,\sin.^2\mu\,:$$

mettant cette valeur de p dans l'intégrale précédente, il vient

$$Q = \int\frac{n\,\sin.\,\mu\,dq}{1+n\,\sin.^2\mu - 2nq\,\cos.\,\mu\,\Delta(\mu) + q^2\,(n^2+nc^2\,\sin.^2\mu)}\,.$$

Pour trouver cette dernière intégrale, nous remarquerons que, si l'on différentie la fonction générale

$$\frac{hq}{k+lq} = \text{tang.}u,$$

on obtient

$$du = \frac{hkdq}{k^2 + 2klq + (h^2 + l^2)q^2}.$$

La différentielle du renfermant, dans son expression, trois constantes indéterminées h, k, l, on pourra disposer de celles-ci de manière à rendre identiques les dénominateurs des fractions qui représentent les valeurs de dQ et de du. C'est à quoi l'on parviendra, en posant

$$k^2 = 1 + n\sin.^2\mu,\quad kl = -n\cos.\mu\,\Delta(\mu),\quad h^2 + l^2 = n^2 + nc^2\sin.^2\mu;$$

d'où l'on tire

$$k = \sqrt{1 + n\sin.^2\mu},\quad l = \frac{-n\cos.\mu\,\Delta(\mu)}{\sqrt{1 + n\sin.^2\mu}},$$

$$h = \frac{\sin.\mu\sqrt{n(c^2 + n^2 + nc^2 + n)}}{\sqrt{1 + n\sin.^2\mu}},$$

et si l'on fait, pour abréger (§ 39),

$$\alpha = (1+n)\left(1 + \frac{c^2}{n}\right),\quad \text{on a } h = \frac{\sqrt{\alpha}\,n\sin.\mu}{\sqrt{1 + n\sin.^2\mu}}.$$

Il suit de là que

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{hkdq}{k^2 + 2klq + (h^2 + l^2)q^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{hq}{k + lq}\right) + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{n\sqrt{\alpha}\,\sin.\mu\sin.\varphi\sin.\psi}{1 + n\sin.^2\mu - n\cos.\mu\Delta(\mu)\sin.\varphi\sin.\psi}\right) + \text{const.};$$

et, à cause de la relation

$$\Delta(\mu)\sin.\varphi\sin.\psi = \cos.\varphi\cos.\psi - \cos.\mu,$$

qui simplifie l'expression de Q, il vient

$$(1). \ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{kap.}\varphi + \text{kap.}\psi - \text{kap.}\mu = \\ \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc(tang.} = \dfrac{n\sqrt{\alpha}\,\text{sin.}\mu\,\text{sin.}\varphi\,\text{sin.}\psi}{1+n-n\text{cos.}\mu\,\text{cos.}\varphi\,\text{cos.}\psi}\Big). \end{array} \right.$$

Nous avons supprimé la constante arbitraire, parce que les six fonctions kap.φ, kap.ψ, kap.μ, sin.φ, sin.ψ, sin.μ, s'évanouissent avec leur amplitude.

§ 53. La formule générale (1) correspond, pour les fonctions de troisième espèce, à la formule

$$\text{dig.}\varphi + \text{dig.}\psi - \text{dig.}\mu = o,$$

pour les digamma, et à la formule

$$\text{eps.}\varphi + \text{eps.}\psi - \text{eps.}\mu = c^2 \text{ sin.}\mu \text{ sin.}\varphi \text{ sin.}\psi,$$

pour les epsilon. Ainsi, *la différence qui est nulle pour les digamma, et algébrique pour les epsilon, est exprimée par un arc de cercle ou par un logarithme, pour les kappa.* Je dis *arc de cercle* ou *logarithme*, car on voit que la valeur de Q représentera la première ou la seconde de ces fonctions, selon que α sera positif ou négatif.

De l'équation (1), et de toutes celles qu'on peut former semblablement entre trois kappa, nous conclurons, comme nous l'avons fait au § 34 pour les epsilon, que si i, k, l, etc., sont des nombres entiers positifs, on pourra toujours faire en sorte que l'on ait

$$i \text{ kap.}\varphi + k \text{ kap.}\psi + l \text{ kap.}\omega + \text{etc.} = \text{W},$$

W étant une quantité déterminable par arcs de cercle ou par logarithmes, pourvu qu'on ait entre les amplitudes φ, ψ, ω, etc., la relation qui donne

$$i \text{ dig.}\varphi + k \text{ dig.}\psi + l \text{ dig.}\omega + \text{etc.} = o,$$

relation qui peut toujours être remplacée par une équation algébrique entre les sinus des amplitudes (§ 22).

Lorsque φ et ψ sont les amplitudes de digamma complémentaires, on a $\mu = \frac{\pi}{2}$, et sin. $\psi = \frac{\text{cos.}\varphi}{\Delta(\varphi)}$: la formule (1) devient alors

$$\text{kap.}\,\varphi + \text{kap.}\,\psi - \text{K} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{n\sqrt{\alpha}}{1+n}\cdot\frac{\sin.\varphi\,\cos.\varphi}{\Delta}\right),$$

et, sous cette forme, elle peut servir à déterminer kap.φ, au moyen de la fonction complète K, et d'un autre kappa d'autant plus petit que kap.φ sera plus grand.

Si l'on a $\varphi = \psi$, ce qui donne (§ 19)

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{b}},\ \sin.\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+b}},\ \cos.\varphi = \sqrt{\frac{b}{1+b}},\ \Delta(\varphi) = \sqrt{b},$$

il vient

$$\text{kap.}\,\varphi = \tfrac{1}{2}\,\text{K} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{n\sqrt{\alpha}}{1+n}\cdot\frac{1}{1+b}\right);$$

d'où l'on conclura, en vertu d'un théorème dont il sera question au § 55, que *tout kappa dont l'amplitude a pour tangente trigonométrique* $\frac{1}{\sqrt{b}}$, *peut s'exprimer par des fonctions d'une espèce inférieure.*

§ 54. En appliquant aux kappa, la remarque que nous avons faite au § 32 pour les epsilon, il est évident que la formule (1) pourra s'écrire sous la forme

$$\text{kap.amp.}p + \text{kap.amp.}q - \text{kap.amp.}(p+q) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\text{arc}\left[\text{tang.} = \frac{n\sqrt{\alpha}.\sin.\text{amp.}p.\sin.\text{amp.}q.\sin.\text{amp.}(p+q)}{1+n-n\cos.\text{amp.}p.\cos.\text{amp.}q.\cos.\text{amp.}(p+q)}\right];$$

par où l'on voit sur-le-champ que si Hamp.p, Hamp.q, représentent des fonctions de la forme

$$\text{kap.amp.}p + kp,\quad \text{kap.amp.}q + kq,$$

k désignant une quantité quelconque, la différence

$$\text{Hamp.}p + \text{Hamp.}q - \text{Hamp.}(p+q)$$

sera encore égale au second membre de l'équation précédente.

§ 55. Il existe entre l'amplitude et l'angle du paramètre de la fonction kappa, des relations importantes, que nous allons faire connaître, et qui serviront à démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Tout kappa complet peut s'exprimer par des digamma et des epsilon.*

Démonstration. Si l'on différentie, par rapport à n (*voyez la note* III), chaque membre de l'équation

$$\text{kap.}\varphi = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\,\Delta},$$

on aura

$$-\frac{d.\text{kap.}\varphi}{dn} = \int \frac{\sin.^2\varphi\, d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)^2\Delta},$$

et si l'on fait, pour un instant, $1 + n\sin.^2\varphi = u$, le second membre de cette équation deviendra égal à $\frac{1}{n}\int \frac{u-1}{u^2}.\frac{d\varphi}{\Delta}$; d'où l'on tire, en remettant au lieu de u sa valeur,

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n\sin.^2\varphi)^2\Delta} = \text{kap.}\varphi + n\frac{d.\text{kap.}\varphi}{dn}.$$

Remplaçant l'intégrale par sa valeur trouvée au § 14, il vient, après réduction,

$$dn\left(1 - \frac{c^2}{n^2}\right)\text{kap.}\varphi + 2\alpha.d.\,\text{kap.}\varphi =$$

$$\Delta \sin.\varphi\cos.\varphi.\ \frac{dn}{1+n\sin.^2\varphi} - c^2\frac{dn}{n^2}\,\text{dig.}\varphi - \frac{dn}{n}(\text{dig.}\varphi - \text{eps.}\varphi);$$

et si l'on remarque que $d\alpha = dn\left(1 - \frac{c^2}{n^2}\right)$, on aura

$$\frac{1}{2}d\alpha.\,\text{kap.}\varphi + \alpha.d.\,\text{kap.}\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\sin.\varphi\cos.\varphi\ \frac{dn}{1+n\sin.^2\varphi} - \frac{1}{2}c^2\frac{dn}{n^2}\,\text{dig.}\varphi - \frac{1}{2}\frac{dn}{n}(\text{dig.}\varphi - \text{eps.}\varphi);$$

équation dans laquelle il faudra regarder kap.φ et α, comme variables principales, et n comme variable indépendante. Multipliant, de part et d'autre, par $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, et intégrant, il viendra

$$(2)\ldots\ \sqrt{\alpha}.\text{kap.}\varphi = \frac{1}{2}\Delta\sin.\varphi\cos.\varphi\int\frac{dn}{(1+n\sin.^2\varphi)\sqrt{\alpha}}$$

$$-\frac{1}{2}c^2\,\text{dig.}\varphi\int\frac{dn}{n^2\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2}(\text{dig.}\varphi - \text{eps.}\varphi)\int\frac{dn}{n\sqrt{\alpha}}.$$

La généralité de cette formule, permet de l'appliquer à toutes les fonctions de troisième espèce, quel que soit le type de leur paramètre; mais, d'après ce qu'on a vu au chapitre précédent sur la réduction des kappa à deux types normaux, il suffira de considérer le cas où la fonction kappa a pour type du paramètre $n = -1 + b^2 \sin.^2\theta$; et celui où elle a pour type du paramètre $n = -c^2 \sin.^2\theta$.

Ier CAS. *Kappa circulaires normaux.*

On aura, dans ce cas,

$$\frac{dn}{\sqrt{a}} = 2d\theta.\Delta(b,\theta), \quad \sqrt{a} = \frac{b^2 \sin.\theta \cos.\theta}{\Delta(b,\theta)},$$

et l'équation générale (2) deviendra

$$(3) \ldots\ldots \frac{b^2 \sin.\theta \cos.\theta}{\Delta(b,\theta)} \text{kac.}(\theta,c,\varphi) =$$

$$(\text{dig.}\varphi - \text{eps.}\varphi) \int \frac{d\theta}{\Delta(b,\theta)} - c^2 \text{dig.}\varphi \int \frac{d\theta}{(1-b^2 \sin.^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \Delta \sin.\varphi \cos.\varphi \int \frac{d\theta.\Delta(b,\theta)}{\cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\theta \sin.^2\varphi}.$$

Or, nous avons (§ 43)

$$\int \frac{d\theta}{(1-b^2 \sin.^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{c^2} \text{eps.}(b,\theta) - \frac{b^2}{c^2} \frac{\sin.\theta \cos.\theta}{\Delta(b,\theta)};$$

de plus, en faisant $b^2 \text{tang.}^2\varphi = n'$, il vient

$$\Delta \sin.\varphi \cos.\varphi \int \frac{d\theta \Delta(b,\theta)}{\cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\theta \sin.^2\varphi} = \Delta \text{tang.}\varphi \int \frac{d\theta(1-b^2 \sin.^2\theta)}{(1+n' \sin.^2\theta)\Delta(b,\theta)}:$$

en comparant cette dernière intégrale à la valeur de H donnée au § 8, on trouvera que

$$\Delta \sin.\varphi \cos.\varphi \int \frac{d\theta \Delta(b,\theta)}{\cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\theta \sin.^2\varphi} =$$

$$\frac{\Delta}{\sin.\varphi \cos.\varphi} \text{kap.}(n',b,\theta) - \Delta \cot.\varphi \text{dig.}(b,\theta).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), et remettant $b^2\text{tang.}^2\varphi$ au lieu de n', on obtient

$$(4)\ \ldots\ldots\ \frac{b^2\sin.\theta\cos.\theta}{\Delta(b,\theta)}[\text{kac.}(\theta,c,\varphi)-\text{dig.}(c,\varphi)]=$$

$$\frac{\Delta(c,\varphi)}{\sin.\varphi\cos.\varphi}[\text{kap.}(b^2\text{tang.}^2\varphi,b,\theta)-\cos.^2\varphi\,\text{dig.}(b,\theta)]$$

$$+\ \text{dig.}(c,\varphi)\,\text{dig.}(b,\theta)-\text{eps.}(c,\varphi)\,\text{dig.}(b,\theta)-\text{dig.}(c,\varphi)\ \text{eps.}(b,\theta).$$

On n'a point ajouté de constante, parce qu'en faisant $\theta=o$, les deux membres s'évanouissent.

§ 56. Pour ramener au type normal le kappa circulaire du second membre de cette équation, on commencera par le réduire à la forme kap.$(\cot.^2\varphi, b, \theta)$ à l'aide de la formule (b) du § 39. Ensuite, par la formule (a) du § 38, on réduira ce dernier kappa à la forme kap. $(-1+c^2\sin.^2\varphi, b, \theta)$. On trouvera, de cette manière, la formule générale

$$(e)\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{b^2\sin.\theta\cos.\theta}{\Delta(b,\theta)}[\text{kac.}(\theta,c,\varphi)-\text{dig.}(c,\varphi)]\\ +\dfrac{c^2\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta(c,\varphi)}[\text{kac.}(\varphi,b,\theta)-\text{dig.}(b,\theta)]\\ +\ \text{eps.}(c,\varphi)\,\text{dig.}(b,\theta)+\text{eps.}(b,\theta)\,\text{dig.}(c,\varphi)\\ -\ \text{dig.}(c,\varphi)\text{dig.}(b,\theta)-\text{arc tang.}\left[\dfrac{\Delta(c,\varphi)}{\cot.\varphi}\cdot\dfrac{\Delta(b,\theta)}{\cot.\theta}\right]\end{array}\right\}=0.$$

Il résulte de la symétrie de cette formule, que *l'on peut y permuter l'amplitude et l'angle du paramètre, pourvu qu'on y permute en même temps les modules* b *et* c.

En la combinant avec l'équation (a) du § 38, on en déduit

$$(e')\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Delta(b,\theta)}{\sin.\theta\cos.\theta}\text{kap.}(\cot.^2\theta,c,\varphi)+\dfrac{\Delta(c,\varphi)}{\sin.\varphi\cos.\varphi}\text{kap.}(\cot.^2\varphi,b,\theta)=\tfrac{1}{2}\pi\\ +\text{tang.}\theta\Delta(b,\theta)\,\text{dig.}(c,\varphi)+\text{tang.}\varphi\Delta(c,\varphi)\,\text{dig.}(b,\theta)\\ +\text{dig.}(c,\varphi)\text{dig.}(b,\theta)-\text{dig.}(c,\varphi)\text{eps.}(b,\theta)-\text{eps.}(c,\varphi)\text{dig.}(b,\theta).\end{array}\right.$$

Si l'on a $b=c$, c'est-à-dire si le module $c=\sin.45^\circ$, et que l'angle θ

du paramètre soit en même temps égal à l'amplitude φ, on trouve

$$\frac{2\Delta}{\sin.\varphi\cos.\varphi}\text{kap.}(\cot.^2\varphi,\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\tfrac{1}{2}\pi+(2\Delta\text{tang.}\varphi+\text{dig.}\varphi-2\text{eps.}\varphi)\text{dig.}\varphi.$$

Lorsque $\varphi=\frac{\pi}{2}$, kac.$(\theta,\ c,\ \varphi)$ devient la fonction complète $K(-1+b^2\sin.^2\theta,c)$, et l'équation (e) donne, pour la déterminer,

$$(5)\ \ldots\ldots\ \frac{b^2\sin.\theta\cos.\theta}{\Delta(b,\theta)}[K(-1+b^2\sin.^2\theta,c)-D(c)]$$

$$=\frac{\pi}{2}+D(c)\text{dig.}(b,\theta)-E(c)\text{dig.}(b,\theta)-D(c)\text{eps.}(b,\theta);$$

par où l'on voit que la fonction complète de troisième espèce dont il s'agit, s'exprime généralement par des digamma et des epsilon.

La fonction non complète kac. (θ,c,φ) s'exprimera également par des fonctions de la première et de la seconde espèce, si l'amplitude φ est telle qu'on ait

$$\text{dig.}(c,\varphi)=kD(c),$$

k étant un nombre rationnel; car alors, il résulte du § 53 que

$$\text{kac.}(\theta,c,\varphi)=kK(-1+b^2\sin.^2\theta,c)+W,$$

W étant une quantité déterminable par arcs de cercle. Il en sera de même, si le paramètre n est positif, et, par conséquent, de la forme $n=\cot.^2\theta$. En combinant l'équation (a) du § 38 avec l'équation (5), on obtient, pour la fonction complète,

$$(6)\ \ldots\ \frac{\Delta(b,\theta)}{\sin.\theta\cos.\theta}\cdot K(\cot.^2\theta,c)=\frac{\pi}{2}+\text{tang.}\theta\,\Delta(b,\theta)D(c)$$

$$+D(c)\text{dig.}(b,\theta)-E(c)\text{dig.}(b,\theta)-D(c)\text{eps.}(b,\theta).$$

§ 57. Supposons que l'angle θ, déterminé par le paramètre $n=-1+b^2\sin.^2\theta$, soit tel que, pour le module b, on ait

$$(7)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{dig.}(b,\theta)=kD(b),$$

k étant rationnel : alors on aura, par les propriétés connues,

$$(8)\ \ldots\ldots\ \text{kac.}(\varphi,b,\theta)=kK(-1+c^2\sin.^2\varphi,b)+W,$$

W représentant, comme tout à l'heure, une quantité assignable par arcs de cercle. On aura en même temps (§ 34)

$$(9). \ldots\ldots\ldots \quad \text{eps.}(b,\theta) = k\text{E}(b) + \text{V},$$

V étant une quantité algébrique. Or, si dans l'équation (8), on substitue à kac. (φ, b, θ) sa valeur en kac. (θ, c, φ) tirée de la relation générale (e); que l'on y substitue également à $\text{K}(-1 + c^2 \sin.^2\varphi, b)$, sa valeur en fonctions d'espèces inférieures, que l'on déduira de l'équation (5), *mutatis mutandis;* qu'enfin l'on élimine dig.(b, θ) et eps. (b, θ) au moyen des équations (7) et (9), on obtiendra

$$\text{kac.}(\theta,c,\varphi) = \left[1 - \frac{\Delta(b,\theta)}{b^2 \sin.\theta \cos.\theta}\text{V}\right] \text{dig.}(c,\varphi) + \frac{\Delta(c,\varphi)\Delta(b,\theta)}{b^2 \sin.\varphi \cos.\varphi \sin.\theta \cos.\theta}\text{W};$$

par où l'on voit que tout kappa circulaire normal peut être réduit à un digamma, si l'équation (7) est satisfaite.

2e CAS. *Kappa logarithmiques normaux.*

§ 58. La substitution de la valeur $n = -c^2 \sin.^2\theta$ dans l'équation générale (2), donne

$$\cot.\theta\ \Delta(c,\theta)\text{kap.}(-c^2\sin.^2\theta, c, \varphi) = (\text{dig.}\varphi - \text{eps.}\varphi)\int \frac{d\theta}{\Delta(c,\theta)}$$
$$- \text{dig.}\varphi \int \frac{d\theta}{\sin.^2\theta\Delta(c,\theta)} + \Delta \sin.\varphi \cos.\varphi \int \frac{c^2 d\theta . \sin.^2\theta}{(1 - c^2\sin.^2\theta \sin.^2\varphi)\Delta(c,\theta)}.$$

On a de plus, par le § 11,

$$\int \frac{d\theta}{\sin.^2\theta\Delta(c,\theta)} = \text{dig.}(c,\theta) - \text{eps.}(c,\theta) - \Delta(c,\theta)\cot.\theta,$$

et par la formule (a) du § 8,

$$\int \frac{c^2 \sin.^2\theta d\theta}{(1 - c^2\sin.^2\varphi \sin.^2\theta)\Delta(c,\theta)} = \frac{1}{\sin.^2\varphi}[\text{kal.}(\varphi,c,\theta) - \text{dig.}(c,\theta)]:$$

donc, la formule générale devient

$$(f). \ldots \left\{ \begin{array}{c} \cot.\theta.\Delta(c,\theta)[\text{kal.}(\theta,c,\varphi) - \text{dig.}(c,\varphi)] \\ - \cot.\varphi.\Delta(c,\varphi)[\text{kal.}(\varphi,c,\theta) - \text{dig.}(c,\theta)] \\ + \text{dig.}(c,\theta)\,\text{eps.}(c,\varphi) \\ - \text{dig.}(c,\varphi)\,\text{eps.}(c,\theta) \end{array} \right\} = 0.$$

Cette équation, provenant d'une intégration dans laquelle φ a été regardé comme constant, devrait avoir pour second membre, une fonction inconnue de φ, que nous désignerons par $F(\varphi)$. Pour la déterminer, nous remarquerons que si l'on permute θ et φ, après avoir remplacé zéro par $F(\varphi)$, le premier membre restera le même au signe près, tandis que le second deviendra $F(\theta)$: par conséquent $F(\varphi) + F(\theta) = o$. Or, cette condition est impossible à remplir (à cause de l'indépendance des angles θ et φ) si l'on ne suppose, comme nous l'avons fait, $F(\varphi) = o$.

L'équation précédente, plus simple que celle qui se rapporte aux kappa circulaires, est composée de telle manière, qu'*on peut y permuter l'amplitude et l'angle du paramètre sans changer le module.* Si l'on y fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura immédiatement

$$(10).\quad K(-c^2\sin.^2\theta, c) = D(c) + \frac{\tang.\theta}{\Delta(c,\theta)}\left[D(c)\,\mathrm{eps.}(c,\theta) - E(c)\,\mathrm{dig.}(c,\theta)\right];$$

d'où l'on tirera la même conclusion que pour les kappa circulaires complets.

On démontrerait de la même manière que pour les kappa circulaires, que la fonction non complète kal.(θ, c, φ) se réduit à des fonctions d'espèces inférieures, si l'amplitude φ est telle qu'on ait dig.$\varphi = k\,D(c)$, k étant un nombre rationnel.

Nous remarquerons à l'égard des formules (e) et (f), qu'elles peuvent se déduire l'une de l'autre au moyen de la formule (d) du § 42.

§ 59. Supposons maintenant que l'angle θ du paramètre soit tel qu'on ait

$$\mathrm{dig.}\theta = kD(c) :$$

on aura

$$\mathrm{eps.}\theta = kE(c) + V$$

et

$$\mathrm{kal.}(\varphi, c, \theta) = kK(-c^2\sin.\varphi, c) + W,$$

V étant déterminable algébriquement, et W renfermant des logarithmes. Ces valeurs, et celle de la fonction $K(-c^2\sin.^2\varphi, c)$ déduite de la formule (10), étant substituées dans l'équation (f), il en résulte

$$\mathrm{kal.}(\theta, c, \varphi) = \left(1 + \frac{V\,\tang.\theta}{\Delta(c,\theta)}\right)\mathrm{dig.}(c,\varphi) + \frac{W\cot.\varphi\,\Delta(c,\varphi)}{\cot.\theta\,\Delta(c,\theta)};$$

d'où il suit que tout kappa logarithmique peut être réduit à des fonctions d'espèces inférieures, si l'angle θ de son paramètre est tel qu'on ait $\text{dig.}(c, \theta) = k\,\text{D}(c)$, k étant un nombre rationnel.

Lorsque le paramètre se présente sous la forme $n = -\frac{1}{\sin.^2\theta}$, la combinaison de la formule (10) avec l'équation (4) du § 39, donne, pour valeur de la fonction complète,

$$\text{K}\left(-\frac{1}{\sin.^2\theta}, c\right) = \frac{\text{tang.}\theta}{\Delta(c,\theta)}\left[\text{E}(c)\text{dig.}(c,\theta) - \text{D}(c)\text{eps.}(c,\theta)\right].$$

Il est à remarquer que les formules de réduction sont plus simples pour les kappa logarithmiques que pour les kappa circulaires, puisqu'elles ne contiennent point les fonctions $\text{D}(b)$ et $\text{E}(b)$, relatives au module complémentaire.

Observons aussi que la valeur de $\text{K}(-c^2\sin.^2\theta, c)$ donnée par la formule (10), serait indéterminée, si l'on avait $\theta = \frac{1}{2}\pi$, ou $n = -c^2$. Mais alors on a généralement, pour toute valeur de φ (§ 43),

$$\text{kap.}(-c^2, c, \varphi) = \frac{1}{b^2}\text{eps.}\varphi - \frac{c^2\sin.\varphi\cos.\varphi}{b^2\Delta(c,\varphi)},$$

et, par conséquent,

$$\text{K}(-c^2, c) = \frac{1}{b^2}\text{E}(c).$$

§ 60. Nous terminerons ces recherches en faisant observer que la démonstration de la formule

$$(11). \ldots\ldots \quad \frac{\pi}{2} = \text{D}(c)\,\text{E}(b) + \text{D}(b)\,\text{E}(c) - \text{D}(c)\,\text{D}(b),$$

mentionnée au § 36, est la conséquence immédiate de l'équation (5), quand on attribue à θ la valeur $\frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE VII.

De la transcendante T.

§ 61. Les fonctions elliptiques de la troisième espèce renfermant trois quantités, n, c et φ, l'on croyait généralement, avant que M. Jacobi eût publié ses travaux mémorables, que ces fonctions n'étaient pas susceptibles d'être exprimées au moyen d'autres transcendantes, qui n'en continssent que deux. De là, une véritable impossibilité de les réduire en tables, car en prenant pour arguments (*) l'angle λ du paramètre, l'angle θ du module, et l'amplitude φ, ces tables eussent été à *triple entrée* et auraient coûté des calculs prodigieux, même dans l'hypothèse où les arguments n'auraient procédé que de degré en degré. Les recherches du savant géomètre qu'on vient de nommer, l'ayant conduit à s'occuper de nouvelles transcendantes, qui se rattachent aux fonctions elliptiques, il reconnut que tout kappa logarithmique peut s'exprimer au moyen de deux nouvelles fonctions d'un et de deux arguments, q et Θ, dont nous traiterons plus tard. Ainsi, en ajoutant aux tables qu'on possède, la table des fonctions Θ, et une table auxiliaire pour calculer q au moyen du module (**), on aurait été en état d'évaluer les kappa logarithmiques, à l'aide de tables à *double entrée* seulement. Legendre, qui apprécia d'abord toute l'importance de cette découverte, fit observer cependant qu'elle ne s'étendait pas aux kappa circulaires. Voici comment il s'exprime à cet égard :

(*) On appelle *argument* d'une table, l'élément qui sert à trouver la fonction : ainsi, les angles sont les arguments des lignes trigonométriques, les nombres sont les arguments de leurs logarithmes, etc.

(**) On la trouvera à la fin de cet ouvrage.

« M. Jacobi est le premier qui ait remarqué cette belle propriété, » que l'usage des fonctions Θ, dont il est l'inventeur, lui a fait dé- » couvrir dans les fonctions elliptiques de troisième espèce, à para- » mètre logarithmique. Il a annoncé en même temps, que la même » propriété pourrait aussi s'appliquer aux fonctions à paramètre cir- » culaire ; ce qui serait un très-grand perfectionnement de la théorie » des fonctions elliptiques, puisque la détermination numérique de » ces fonctions ne dépendrait, dans tous les cas, que d'un petit » nombre de tables à double entrée, dont les principales sont déjà » calculées. Mais, jusqu'à présent, les tentatives que j'ai faites pour » étendre aux fonctions à paramètre circulaire, la propriété qui est » démontrée pour les fonctions à paramètre logarithmique, sont » restées sans succès. Ainsi nous devons suspendre notre jugement » sur ce point, jusqu'à ce que M. Jacobi fasse connaître les formules » par lesquelles il pourrait justifier son assertion.

» Dans le cas où il serait bien constaté que les fonctions à para- » mètre circulaire ne sont pas susceptibles de la réduction qui a lieu » pour les fonctions à paramètre logarithmique, il faudrait admettre » que les fonctions à paramètre circulaire constituent une quatrième » espèce de fonctions elliptiques, plus composée que les trois autres, » et qui ne peut se simplifier que pour des valeurs du paramètre ca- » ractérisées par un symptôme général ; mais alors elles se réduisent » toujours à la première espèce, et ne peuvent plus être rangées » dans la quatrième. » (*Voyez la note* IV.)

§ 62. Outre les fonctions réductrices q et Θ, on doit encore à M. Jacobi la découverte d'une autre transcendante, représentée par l'intégrale

$$\Upsilon(c,\varphi)=\int \text{eps.}(c,\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}.$$

Nous la nommerons la fonction *upsilon*, du nom de la lettre grecque employée à la désigner. Voici, à peu près, comment M. Jacobi expose la réduction des kappa logarithmiques au moyen de cette transcendante.

Soient μ et ν des amplitudes telles, qu'on ait, pour le module commun c,

(1). . . . . $\text{dig.}\mu = \text{dig.}\varphi + \text{dig.}\lambda$,

(2). . . . . $\text{dig.}\nu = \text{dig.}\varphi - \text{dig.}\lambda$,

λ étant l'angle du paramètre de la fonction kal.(λ, c, φ). On aura en même temps (§ 30)

$$\text{eps.}\nu + \text{eps.}\lambda - \text{eps.}\varphi = c^2\sin.\lambda\sin.\varphi\sin.\nu,$$
$$\text{eps.}\varphi + \text{eps.}\lambda - \text{eps.}\mu = c^2\sin.\lambda\sin.\varphi\sin.\mu.$$

D'ailleurs, les amplitudes μ et ν se déduisent des amplitudes φ et λ, par les formules connues

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad \sin.\mu = \frac{\sin.\varphi\cos.\lambda\Delta(\lambda) + \sin.\lambda\cos.\varphi\Delta(\varphi)}{1 - c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi},$$

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad \sin.\nu = \frac{\sin.\varphi\cos.\lambda\Delta(\lambda) - \sin.\lambda\cos.\varphi\Delta(\varphi)}{1 - c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi}.$$

Considérons maintenant la fonction

$$Z = \Upsilon(\mu) - \Upsilon(\nu) = \int\frac{d\mu}{\Delta(\mu)}\,\text{eps.}\mu - \int\frac{d\nu}{\Delta(\nu)}\,\text{eps.}\nu :$$

si l'on regarde λ comme constant, on aura, en vertu des équations (1) et (2),

$$d.\text{dig.}\mu = d.\text{dig.}\varphi, \text{ ou } \frac{d\mu}{\Delta(\mu)} = \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

et semblablement

$$\frac{d\nu}{\Delta(\nu)} = \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} :$$

donc

$$Z = \int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}(\text{eps.}\mu - \text{eps.}\nu).$$

Par les formules précédentes, on a

$$(5). \quad . \quad . \quad \text{eps.}\mu - \text{eps.}\nu = 2\,\text{eps.}\lambda - c^2\sin.\lambda\sin.\varphi(\sin.\mu + \sin.\nu),$$

$$(6). \quad . \quad . \quad \sin.\mu + \sin.\nu = \frac{2\sin.\varphi\cos.\lambda\Delta(\lambda)}{1 - c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi} :$$

donc

$$Z = \int\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\left[2\,\text{eps.}\lambda - 2c^2\sin.\lambda\cos.\lambda\Delta(\lambda).\ \frac{\sin.^2\varphi}{1 - c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi}\right].$$

Mais

$$\int \frac{\sin.^2\varphi\, d\varphi}{(1-c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi)\Delta(\varphi)} = \frac{-\mathrm{dig.}\varphi}{c^2\sin.^2\lambda} + \frac{\mathrm{kal.}(\lambda,c,\varphi)}{c^2\sin.^2\lambda} :$$

par conséquent

$$(7).\ .\ \frac{\Upsilon(\mu)-\Upsilon(\nu)}{2} = \mathrm{eps.}\lambda\,\mathrm{dig.}\varphi + \cot.\lambda\,\Delta(\lambda)\,[\mathrm{dig.}\varphi - \mathrm{kal.}(\lambda,c,\varphi)]\,;$$

résultat auquel il faudra ajouter une constante arbitraire.

Pour la déterminer, nous remarquerons que, puisque eps.φ devient — eps.φ quand φ devient — φ, il s'ensuit que l'intégrale

$$\Upsilon(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\,\mathrm{eps.}\varphi,$$

reste la même quand on change le signe de φ; d'où l'on conclut que $\Upsilon(\varphi)$ est une fonction paire de φ (*). Or si l'on fait, pour un instant, $\varphi = 0$, on a $\mu = \lambda$, $\nu = -\lambda$, et l'équation (7) se réduit à

$$\frac{\Upsilon(\lambda) - \Upsilon(-\lambda)}{2} = \mathrm{const.};$$

ce qui prouve que la constante est nulle.

§ 63. Avant de rechercher les propriétés de la fonction Υ, nous allons en donner une représentation géométrique, qui découle immédiatement de l'expression de sa différentielle.

Soient $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ (*fig.* 6), les demi-axes de la fausse ellipse, et $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$, ceux de l'ellipse génératrice (§ 16). Du centre O, menons un nombre indéfini de rayons vecteurs $\overline{Or}$, $\overline{Or'}$, $\overline{Or''}$, etc. : aux points r, r', r'', etc., élevons les droites $\overline{rp}$, $\overline{r'p'}$, $\overline{r''p''}$, etc., perpendiculaires au plan de la fausse ellipse, que nous supposerons horizontal, et déterminons les points p, p', p'', etc., par les conditions

$\overline{r\,p}$ = arc d'ellipse correspondant à l'amplitude BOr,
$\overline{r'p'}$ = arc d'ellipse correspondant à l'amplitude BOr',
$\overline{r''p''}$ = arc d'ellipse correspondant à l'amplitude BOr'',
etc.

(*) On appelle *fonction paire*, celle qui, étant développée, ne contiendrait que des puissances paires de la variable.

Ces points formeront une espèce d'hélice, dont la courbure variera continuellement depuis B jusqu'à D, où $\overline{DE}$ est égale à la demi-ellipse *bad*. Mais à partir de D, la courbe recommencera à s'élever par les mêmes degrés qu'en B, parce que l'ordonnée verticale $\overline{MF}$ d'un point quelconque M, se composera d'une demi-ellipse, plus l'arc d'ellipse correspondant à l'amplitude FOE = BO*r*. Prenons sur l'axe vertical $\overline{OH}$ les longueurs $\overline{Oq}$, $\overline{Oq'}$, $\overline{Oq''}$, etc., égales à $\overline{rp}$, $\overline{r'p'}$, $\overline{r''p''}$, etc., et menons les droites $\overline{pq}$, $\overline{p'q'}$, $\overline{p''q''}$, etc. : leur ensemble constituera un *héliçoïde à base de fausse ellipse*, qui jouira de la propriété suivante : Si l'on appelle φ l'angle quelconque BO*r*, le solide, intercepté entre le plan vertical O*qpr*, le secteur horizontal BO*r* et les deux surfaces courbes BO*qp* et B*pr*, aura pour valeur la transcendante $\Upsilon(c, \varphi)$, prise entre les limites $\varphi = o$ et $\varphi =$ BO*r*.

Il résulte de la remarque que nous avons faite tout à l'heure, sur la variation de courbure de l'hélice, que la fonction Υ ne devient *complète* que quand on a $\varphi = \pi$. Pour trouver sa valeur dans cette hypothèse, examinons la figure 7 qui répète à peu près la figure précédente, les mêmes lettres désignant les mêmes points. La fonction complète $\Upsilon(\pi)$ sera représentée par le solide compris entre : 1° la base BAE ; 2° les deux portions de surface cylindrique EDCAE et BCAB ; 3° le plan DEOI ; 4° l'héliçoïde OBCDIGO (*fig.* 6). On aura donc, en renfermant entre deux crochets la désignation des surfaces qui limitent chaque solide (*fig.* 7),

$$\Upsilon(\pi) =$$
$$\text{vol.}[\text{OBA, BCA, CGOA, OBCGO}]$$
$$+\text{vol.}[\text{KGC, EOA, KEOG, GOAC, AEKC}]$$
$$+\text{vol.}[\text{KGC, DKGI, DKC, GCDIG}].$$

Dénotons, pour abréger, par V, V′, V″ les trois volumes précédents, et par S et S″ les volumes

$$[\text{OBA, GNC, NBOG, GCAO, NBAC}],$$
$$[\text{KGC, DIL, DKGI, IGCL, LCKD}],$$

il est évident que

$$S = S'' = V' = D(c)\,E(c).$$

Remarquons, maintenant, que le volume égal à l'excès de S″ sur V″, est précisément égal à celui que nous avons appelé V, car si l'on appliquait DIL sur OBA, la courbe DC se confondrait avec BC. Mais

$$\Upsilon(\pi) = V + V' + S'' - (S'' - V'') :$$

par conséquent, en remplaçant S″ — V″ par sa valeur V, et V′ + S″ par sa valeur 2D (c) E(c), il vient

$$\Upsilon(\pi) = 2D(c)E(c).$$

§ 64. Dans un mémoire publié en 1836 (*Journal de M. Crelle*, tome 15), M. Jacobi a fait connaître une proprieté dont jouissent les fonctions Υ, qui est tout à fait analogue à celle que nous avons démontrée au § 32, pour les fonctions elliptiques de la seconde espèce. Voici à peu près son analyse, dans laquelle nous avons remplacé la fonction Ω qu'il considère, par la fonction Υ son logarithme, afin de ne pas multiplier les transcendantes sans nécessité.

Nous avons vu aux §§ 32 et 54, que plusieurs formules relatives aux epsilon et aux kappa, prennent une forme qui met en évidence la propriété qu'elles expriment, quand on regarde ces transcendantes comme des fonctions du digamma de même module et de même amplitude. Comme il en est de même pour les fonctions Υ, nous suivrons la notation adoptée dans les paragraphes précités. Changeons p et q en $p + r$ et $q + r$ dans la formule (12) du § 32 : il viendra

$$(8) \ldots \begin{aligned} &\text{eps.amp.}(p+r)+\text{eps.amp.}(q+r)-\text{eps.amp.}(p+q+2r) \\ &= c^2\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)\sin.\text{amp.}(p+q+2r). \end{aligned}$$

Changeons dans celle-ci p en zéro et q en $p + q$: nous obtiendrons

$$(9) \ldots \begin{aligned} &\text{eps.amp.}r+\text{eps.amp.}(p+q+r)-\text{eps.amp.}(p+q+2r) \\ &= c^2\sin.\text{amp.}(r)\sin.\text{amp.}(p+q+r)\sin.\text{amp.}(p+q+2r). \end{aligned}$$

Retranchons l'une de l'autre les équations (8) et (9) : nous aurons, en faisant usage de la formule (f) du § 24,

$$(10). \begin{aligned} &\text{eps.amp.}(p+r)+\text{eps.amp.}(q+r)-\text{eps.amp.}r-\text{eps.amp.}(p+q+r) \\ &= c^2\sin.\text{amp.}(p+q+2r)\sin.\text{amp.}(p)\sin.\text{amp.}(q) \\ &\times[1-c^2\sin.\text{amp.}(r)\sin.\text{amp.}(p+r)\sin.\text{amp.}(q+r)\sin.\text{amp.}(p+q+r)]. \end{aligned}$$

Observons qu'on déduit de cette même formule (f),

$$[1-c^2\sin.\mathrm{amp}.(r)\sin.\mathrm{amp}.(p+r)\sin.\mathrm{amp}.(q+r)\sin.\mathrm{amp}.(p+q+r)]$$
$$\times[1+c^2\sin.\mathrm{amp}.(p)\sin.\mathrm{amp}.(q)\sin.\mathrm{amp}.(r)\sin.\mathrm{amp}.(p+q+r)]$$
$$=1-c^2\sin.^2\mathrm{amp}.(r)\sin.^2\mathrm{amp}.(p+q+r):$$

par conséquent

$$\mathrm{eps}.\mathrm{amp}.(p+r)+\mathrm{eps}.\mathrm{amp}.(q+r)-\mathrm{eps}.\mathrm{amp}.(r)-\mathrm{eps}.\mathrm{amp}.(p+q+r)=$$
$$\frac{c^2\sin.\mathrm{amp}.(p)\sin.\mathrm{amp}.(q)\sin.\mathrm{amp}.(p+q+2r)[1-c^2\sin.^2\mathrm{amp}.(r)\sin.^2\mathrm{amp}.(p+q+r)]}{1+c^2\sin.\mathrm{amp}.(p)\sin.\mathrm{amp}.(q)\sin.\mathrm{amp}.(r)\sin.\mathrm{amp}.(p+q+r)}.$$

Mais si l'on change simultanément p en zéro et q en $p+q$ dans l'équation (12) du § 24, on en déduit

$$[\sin.\mathrm{amp}.(p+q+2r)][1-c^2\sin.^2\mathrm{amp}.(r)\sin.^2\mathrm{amp}.(p+q+r)]$$
$$=\frac{d[\sin.\mathrm{amp}.(r)\sin.\mathrm{amp}.(p+q+r)]}{dr}:$$

il vient donc, en substituant,

$$\mathrm{eps}.\mathrm{amp}.(p+r)+\mathrm{eps}.\mathrm{amp}.(q+r)-\mathrm{eps}.\mathrm{amp}.(r)-\mathrm{eps}.\mathrm{amp}.(p+q+r)=$$
$$\frac{d.\log.[1+c^2\sin.\mathrm{amp}.(p)\sin.\mathrm{amp}.(q)\sin.\mathrm{amp}.(r)\sin.\mathrm{amp}.(p+q+r)]}{dr};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\Upsilon\mathrm{amp}.(p+r)+\Upsilon\mathrm{amp}.(q+r)-\Upsilon\mathrm{amp}.(r)-\Upsilon\mathrm{amp}.(p+q+r)+\mathrm{const.}=$$
$$\log.[1+c^2\sin.\mathrm{amp}.(p)\sin.\mathrm{amp}.(q)\sin.\mathrm{amp}.(r)\sin.\mathrm{amp}.(p+q+r)].$$

Pour déterminer la constante, nous ferons $r=0$ dans les deux membres ; ce qui nous donnera

$$\Upsilon\,\mathrm{amp}.p+\Upsilon\,\mathrm{amp}.q-\Upsilon\,\mathrm{amp}.(p+q)+\mathrm{const.}=o,$$

et finalement

$$(11).\ \ldots\ \Upsilon\mathrm{amp}.(p+q)+\Upsilon\mathrm{amp}.(p+r)+\Upsilon\mathrm{amp}.(q+r)$$
$$-[\Upsilon\mathrm{amp}.p+\Upsilon\mathrm{amp}.q+\Upsilon\mathrm{amp}.r+\Upsilon\mathrm{amp}.(p+q+r)]$$
$$=\log.[1+c^2\sin.\mathrm{amp}.p\sin.\mathrm{amp}.q\sin.\mathrm{amp}.r\sin.\mathrm{amp}.(p+q+r)].$$

Si l'on fait $q = -r$, comme l'on a en général $\Upsilon\,\mathrm{amp}.(-x) = \Upsilon\,\mathrm{amp}.x$, la formule précédente devient

$$(12).\ .\ .\ 2(\Upsilon\mathrm{amp}.p + \Upsilon\mathrm{amp}.q) = \Upsilon\mathrm{amp}.(p+q) + \Upsilon\mathrm{amp}.(p-q) - \log.(1 - c^2\sin.^2\mathrm{amp}.p\ \sin.^2\mathrm{amp}.q).$$

Mais si l'on change λ en ψ dans les formules (1), (2) et (7), on aura en posant, comme de coutume, $p = \mathrm{dig}.\varphi$, $q = \mathrm{dig}.\psi$,

$$\left.\begin{array}{l}\Upsilon\mathrm{amp}.(p+q) - \Upsilon\mathrm{amp}.(p-q) - 2p(\mathrm{eps.amp}.q + \cot.\mathrm{amp}.q\,\Delta\mathrm{amp}.q) \\ \qquad + 2\cot.\mathrm{amp}.q\,\Delta\mathrm{amp}.q\,\mathrm{kal}.(\mathrm{amp}.q, c, \mathrm{amp}.p)\end{array}\right\} = o.$$

Cette équation, combinée avec la précédente, donnera la formule fondamentale

$$(13).\left\{\begin{array}{l}\Upsilon\mathrm{amp}.p + \Upsilon\mathrm{amp}.q - \Upsilon\mathrm{amp}.(p+q) = \cot.\mathrm{amp}.q\,\Delta\mathrm{amp}.q\,\mathrm{kal}.(\mathrm{amp}.q, c, \mathrm{amp}.p) \\ \qquad\qquad - p(\mathrm{eps.amp}.q + \cot.\mathrm{amp}.q\,\Delta\mathrm{amp}.q) \\ \qquad\qquad - \frac{1}{2}\log.(1 - c^2\sin.^2\mathrm{amp}.p\sin.^2\mathrm{amp}.q).\end{array}\right.$$

La composition du premier membre étant telle qu'on peut y permuter p et q, on peut faire la même chose dans le second; ce qui donne immédiatement la formule (f) du § 58, relative à la permutation de l'amplitude et de l'angle du paramètre dans les kappa logarithmiques. Et comme, à l'aide d'une transformation imaginaire, on peut déduire de la formule (f), la formule (e) relative aux kappa circulaires, il s'ensuit que nous eussions pu tirer de notre formule, la plupart des résultats mentionnés au chapitre VI.

§ 65. Si l'on prend $q = \mathrm{D}$, et que l'on change en même temps p en $-p$ dans la formule (13), on obtient

$$(14).\ \Upsilon\mathrm{amp}.p + \Upsilon\mathrm{amp}.\mathrm{D} - \Upsilon\mathrm{amp}.(\mathrm{D}-p) = p\mathrm{E} - \log.\Delta\,\mathrm{amp}.p.$$

Soit $p = \mathrm{D}$, et l'on a

$$\Upsilon\,\mathrm{amp}.\,\mathrm{D} = \tfrac{1}{2}\mathrm{DE} - \tfrac{1}{2}\log.\,b\ :$$

et si $p = 2\mathrm{D}$, il vient

$$\Upsilon\,\mathrm{amp}.\,(2\mathrm{D}) = 2\mathrm{DE} = \Upsilon(\pi);$$

résultat déjà trouvé par la géométrie (§ 63).

Si l'on change p en $2\mathrm{D} - p$ dans l'équation (14), on trouve, en observant que $\sin.\,\mathrm{amp}.\,(2\mathrm{D} - p) = \sin.\,\mathrm{amp}.\,p$,

$$\Upsilon\mathrm{amp}.(2\mathrm{D} - p) + \Upsilon\mathrm{amp}.\mathrm{D} - \Upsilon\mathrm{amp}.(\mathrm{D}-p) = (2\mathrm{D}-p)\mathrm{E} - \log.\Delta\mathrm{amp}.p.$$

Éliminant log. Δ amp. p entre cette équation et l'équation (14), il reste

(15). . . . . $\Upsilon\text{amp.}(2D-p)-\Upsilon\text{amp.}p=2E(D-p)$;

formule que l'on peut également écrire sous la forme

(16). . . . . $\Upsilon\varphi=\Upsilon(\pi-\varphi)-2E(D-\text{dig.}\varphi)$.

Cette équation fera connaître la fonction $\Upsilon\varphi$ depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à π, en la supposant connue depuis $\varphi=o$, jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. Or, il n'y aura jamais lieu à passer la limite π, quand on appliquera la formule (7) au calcul de la transcendante kal.(λ, c, φ). En effet, les amplitudes φ et λ étant comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$, l'amplitude μ du digamma égal à la somme dig. φ + dig. λ, ne pourra jamais dépasser π. Soit donc $\varphi=\frac{1}{2}\pi+\delta$, et la formule précédente deviendra

$$\Upsilon(\tfrac{1}{2}\pi+\delta)=\Upsilon(\tfrac{1}{2}\pi-\delta)+2E[D-\text{dig.}(\tfrac{1}{2}\pi-\delta)].$$

Si l'on change le signe de φ dans la formule (16) on pourra, des deux équations, tirer les formules suivantes:

$$\Upsilon(\pi+\varphi)-\Upsilon(\pi-\varphi)=4E\,\text{dig.}\varphi,$$
$$\Upsilon(\pi+\varphi)+\Upsilon(\pi-\varphi)=2\Upsilon\varphi+2\Upsilon\pi.$$

Dans cette dernière, faisons successivement $\varphi=\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$, etc., et nous aurons, en ayant égard aux résultats déjà trouvés,

$$\begin{array}{ll}
\Upsilon\tfrac{1}{2}\pi=\tfrac{1}{2}DE-\tfrac{1}{2}\log.b, & \Upsilon\pi=2DE,\\
\Upsilon\tfrac{3}{2}\pi=\Upsilon\tfrac{1}{2}\pi+2\Upsilon\pi, & \Upsilon 2\pi=4\Upsilon\pi,\\
\Upsilon\tfrac{5}{2}\pi=\Upsilon\tfrac{1}{2}\pi+6\Upsilon\pi, & \Upsilon 3\pi=9\Upsilon\pi,\\
\Upsilon\tfrac{7}{2}\pi=\Upsilon\tfrac{1}{2}\pi+12\Upsilon\pi, & \Upsilon 4\pi=16\Upsilon\pi,\\
\Upsilon\tfrac{9}{2}\pi=\Upsilon\tfrac{1}{2}\pi+20\Upsilon\pi, & \Upsilon 5\pi=25\Upsilon\pi,\\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Il s'ensuit que n étant un nombre entier, on aura généralement

$$\Upsilon\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\Upsilon\pi+\tfrac{1}{2}\log.\frac{1}{b},\ \Upsilon n\pi=n^2\Upsilon\pi.$$

Si l'on imagine donc une parabole, représentée par l'équation

$$\frac{\pi^2}{\Upsilon\pi}y=x^2,$$

et une courbe dont les abscisses soient φ et les ordonnées $\Upsilon\varphi$, c'est-à-dire dans laquelle on ait simultanément

$$x = \varphi \quad \text{et } y = \Upsilon\varphi,$$

chaque fois que l'abscisse x de cette courbe deviendra un multiple entier n, de π, son ordonnée sera égale à celle de la parabole, tandis qu'elle la surpassera de la quantité constante $\frac{1}{2}\log.\frac{1}{b}$, dans tous les points où l'on aura $x = (n + \frac{1}{2})\pi$.

§ 66. Si l'on prend $q = p$ dans la formule (12), on a l'équation

$$(17) \quad . \; . \; \Upsilon\text{amp.}(2p) = 4\Upsilon\text{amp.}p + \log.(1 - c^2\sin.^4\text{amp.}p) :$$

en la combinant avec les formules qui servent à la duplication et à la bissection des digamma, et qui sont (§ 20)

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{amp.}(2p) = \Delta\text{amp.}p\,\text{tang.amp.}p,$$

$$\sin.\text{amp.}(\tfrac{1}{2}p) = \frac{\sin.\frac{1}{2}\text{amp.}p}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta\text{amp.}p}},$$

on voit qu'il sera facile d'assigner l'upsilon qui répond, soit à $2^n p$, soit à $\frac{p}{2^n}$. Ainsi, par des bissections répétées du digamma, on pourra faire dépendre un upsilon proposé, d'un autre upsilon aussi petit que l'on voudra.

Nous avons vu au § 33, la formule

$$(18). \; . \; . \; . \; \text{eps.amp.}p = p - \frac{c^2p^3}{1.3} + \frac{(c^2 + c^4)p^5}{1.3.5} - \text{etc}:$$

en multipliant les deux membres par dp, et en intégrant, il vient

$$(19). \; . \; . \; . \; \Upsilon\text{amp.}p = \frac{p^2}{1.2} - \frac{c^2p^4}{1.3.4} + \frac{(c^2 + c^4)p^6}{1.3.5.6} - \text{etc.}$$

L'exactitude de cette formule dépend de celle de la formule (18) : or, lorsque $c = 1$, on a eps. amp. $p = \sin.\varphi$, $dp = \frac{d\varphi}{\cos.\varphi}$, et, par conséquent, Υ amp. $p = -\log.\cos.\varphi$; ce qui permet de vérifier aisément jusqu'à quelle limite la formule (19) est applicable.

Dans le cas où l'on voudrait calculer des tables d'upsilon, il ne serait nécessaire d'employer la formule (19), que depuis $p = o$ jusqu'à $p = \frac{1}{2}$ D. En effet, la formule (14) donne, en remplaçant Υamp. D

par sa valeur $\frac{1}{2}$ DE — $\frac{1}{2}$ log.b,

$$\Upsilon\text{amp.}(D-p)=\Upsilon\text{amp.}p+E(\tfrac{1}{2}D-p)+\log.\left(\frac{\Delta\,\text{amp.}p}{\sqrt{b}}\right);$$

équation par laquelle on fait dépendre l'upsilon d'un digamma proposé, de celui du digamma complémentaire.

§ 67. Si l'on fait $q=p$ dans la formule (13), il vient

$$2\Upsilon\text{amp.}p-\Upsilon\text{amp.}(2p)=\text{cot.amp.}p\,\Delta\text{amp.}p\,\text{kal.}(\text{amp.}p,c,\text{amp.}p)$$
$$-p(\text{eps.amp.}p+\text{cot.amp.}p\Delta\text{amp.}p)-\tfrac{1}{2}\log.(1-c^2\sin.^4\text{amp.}p):$$

combinant ce résultat avec l'équation (17), et remplaçant p par sa valeur dig.φ, on obtient

$$\Upsilon\varphi=\tfrac{1}{2}\text{dig.}\varphi[\text{eps.}\varphi+\text{cot.}\varphi\Delta(\varphi)]$$
$$-\tfrac{1}{2}\log.(1-c^2\sin.^4\varphi)-\tfrac{1}{2}\text{cot.}\varphi\Delta(\varphi)\text{kal.}(\varphi,c,\varphi);$$

expression dans laquelle il faut observer que la fonction kal.(φ, c, φ) représente l'intégrale définie

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{(1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\theta)\Delta(c,\theta)}.$$

Nous avons vu au § 58, que la fonction kal.(φ, c, θ) peut se réduire à des fonctions d'une espèce inférieure, si l'angle φ du paramètre est tel que dig.$\varphi=k$D(c), k étant une fraction rationnelle quelconque, ou un nombre fractionnaire. Par conséquent, il en sera de même de l'intégrale définie qui précède, et par suite de la transcendante $\Upsilon\varphi$. On peut donc énoncer la propriété suivante : *La transcendante* $\Upsilon\varphi$ *peut se réduire à des fonctions des deux premières espèces, chaque fois que son amplitude est telle, que* $\varphi=$ *amp.*(kD), k *étant une fraction rationnelle quelconque, ou un nombre fractionnaire.*

§ 68. On pourrait croire, au premier abord, que la transformation imaginaire de sin.φ en $\sqrt{-1}$ tang.φ', au moyen de laquelle on change les kappa logarithmiques en kappa circulaires (§ 42), servirait à exprimer ces derniers en fonction de la transcendante Υ, en profitant de l'équation (7), qui lie cette transcendante aux kappa logarithmiques. L'analyse suivante fera voir l'erreur de cette supposition, et indiquera en même temps, l'obstacle qui s'oppose à la réduction dont il s'agit.

Soient les équations

$$(20) \ldots\ldots \begin{cases} \text{dig.}\mu = \text{dig.}\varphi + \text{dig.}\lambda, \\ \text{dig.}\nu = \text{dig.}\varphi - \text{dig.}\lambda, \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$\text{eps.}\varphi + \text{eps.}\lambda - \text{eps.}\mu = c^2 \sin.\varphi \sin.\lambda \sin.\mu,$$

$$\text{eps.}\nu + \text{eps.}\lambda - \text{eps.}\varphi = c^2 \sin.\varphi \sin.\lambda \sin.\nu,$$

$$(21). \ 2\text{eps.}\lambda + \text{eps.}\nu - \text{eps.}\mu = c^2 \sin.\varphi \sin.\lambda (\sin.\mu + \sin.\nu).$$

Faisons $\sin.\lambda = \sqrt{-1}\,\text{tang.}\lambda'$; d'où

$$(22). \ \text{eps.}\lambda = \sqrt{-1}\,[\text{dig.}(b,\lambda') - \text{eps.}(b,\lambda') + \Delta(b,\lambda')\,\text{tang.}\lambda'].$$

Si λ est constant, il résulte des équations (20) que

$$\frac{d\mu}{\Delta(\mu)} = \frac{d\varphi}{\Delta}, \quad \frac{d\nu}{\Delta(\nu)} = \frac{d\varphi}{\Delta},$$

et l'équation (21) deviendra, en multipliant chacun de ses termes, soit par $\frac{d\varphi}{\Delta}$, soit par l'un de ses équivalents,

$$(23). \ 2\text{eps.}\lambda \frac{d\varphi}{\Delta} + \text{eps.}\nu \frac{d\nu}{\Delta(\nu)} - \text{eps.}\mu \frac{d\mu}{\Delta(\mu)} = c^2 \sin.\lambda (\sin.\mu + \sin.\nu) \frac{\sin.\varphi d\varphi}{\Delta}.$$

En vertu des équations (20), on a

$$\sin. \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu \end{Bmatrix} = \frac{\sin.\varphi \cos.\lambda\, \Delta(\lambda) \pm \sin.\lambda \cos.\varphi\, \Delta(\varphi)}{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\lambda},$$

$$\cos. \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu \end{Bmatrix} = \frac{\cos.\varphi \cos.\lambda \mp \sin.\varphi \sin.\lambda\, \Delta(\varphi) \Delta(\lambda)}{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\lambda},$$

ou, en remplaçant $\sin.\lambda$ par sa valeur $\sqrt{-1}\,\text{tang.}\lambda'$,

$$(24). \begin{cases} \sin. \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu \end{Bmatrix} = \dfrac{\sin.\varphi\, \Delta(b,\lambda') \pm \sqrt{-1} \cos.\varphi \Delta(c,\varphi) \sin.\lambda' \cos.\lambda'}{\cos.^2\lambda' + c^2 \sin.^2\lambda' \sin.^2\varphi}, \\ \cos. \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu \end{Bmatrix} = \dfrac{\cos.\varphi \cos\lambda' \mp \sqrt{-1} \sin.\varphi \Delta(c,\varphi) \sin.\lambda' \Delta(b,\lambda')}{\cos.^2\lambda' + c^2 \sin.^2\lambda' \sin.^2\varphi}; \end{cases}$$

d'où

$$\sin.\mu + \sin.\nu = \frac{2\sin.\varphi\, \Delta(b,\lambda')}{\cos.^2\lambda' + c^2 \sin.^2\lambda' \sin.^2\varphi}.$$

Reportant cette valeur, et celle de eps.λ donnée par la formule (22), dans l'équation (23), et désignant, pour abréger, par Λ' le polynome qui multipliera $\sqrt{-1}$ dans le premier membre, après ces substitutions, il viendra

$$2\sqrt{-1}\,\Lambda'\frac{d\varphi}{\Delta}+\text{eps.}\nu\,\frac{d\nu}{\Delta(\nu)}-\text{eps.}\mu\,\frac{d\mu}{\Delta(\mu)}=$$

$$2c^2\sqrt{-1}\,\text{tang.}\lambda'\,\Delta(b,\lambda')\,\frac{\sin.^2\varphi}{\cos.^2\lambda'+c^2\sin.^2\lambda'\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$=\frac{2c^2\sqrt{-1}\,\sin.\lambda'\,\Delta(b,\lambda')}{\cos.^3\lambda'}\cdot\frac{\sin.^2\varphi}{1+c^2\text{tang.}^2\lambda'\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}:$$

intégrant des deux parts et divisant par $2\sqrt{-1}$, on a

$$(25)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \left(\frac{\Upsilon\mu-\Upsilon\nu}{2}\right)\sqrt{-1}=$$

$$\frac{c^2\sin.\lambda'\Delta(b,\lambda')}{\cos.^3\lambda'}\int\frac{\sin.^2\varphi}{1+c^2\text{tang.}^2\lambda'\sin.^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}-\Lambda'\text{dig.}\varphi.$$

Il est aisé de voir que la fonction soumise au signe $\int$, est réductible aux kappa circulaires, au moyen de la formule (a) du § 8. La difficulté consiste donc à substituer au système des équations (24) et (25), qui contiennent des imaginaires, un autre système d'équations entre des quantités réelles.

Il est à remarquer que les sinus et les cosinus des amplitudes μ et ν, peuvent s'obtenir sous une forme réelle. Pour nous en convaincre, cherchons la valeur du binome $\cos.\mu+\sqrt{-1}\sin.\mu$: nous trouverons, par les formules (24),

$$(\cos.\mu+\sqrt{-1}\sin.\mu)(\cos.^2\lambda'+c^2\sin.^2\lambda'\sin^2\varphi)=$$

$$\cos.\varphi\cos.\lambda'[1-\sin.\lambda'\Delta(c,\varphi)]+\sqrt{-1}\sin.\varphi\Delta(b,\lambda')[1-\sin.\lambda'\Delta(c,\varphi)].$$

En observant que

$$\cos.^2\lambda'+c^2\sin.^2\lambda'\sin.^2\varphi=1-\sin.^2\lambda'\Delta^2(c,\varphi)$$
$$=[1+\sin.\lambda'\Delta(c,\varphi)][1-\sin.\lambda'\Delta(c,\varphi)]$$

on obtiendra, par la suppression du facteur $1-\sin.\lambda'\Delta(c,\varphi)$, com-

mun aux deux membres de l'équation précédente,

$$\cos.\mu + \sqrt{-1}\sin.\mu = \frac{\cos.\lambda'\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi\Delta(b,\lambda')}{1 + \sin.\lambda'\Delta(c,\varphi)};$$

d'où l'on conclurait, en considérant $\cos.\mu$ et $\sin.\mu$ comme des quantités réelles, mais d'une grandeur quelconque,

$$\cos.\mu = \frac{\cos.\lambda'\cos.\varphi}{1 + \sin.\lambda'\Delta(c,\varphi)}, \quad \sin.\mu = \frac{\sin.\varphi\,\Delta(b,\lambda')}{1 + \sin.\lambda'\,\Delta(c,\varphi)}.$$

Si l'on fait la somme des carrés de ce sinus et de ce cosinus, on trouvera

$$\sin.^2\mu + \cos.^2\mu = \frac{1 - \sin.\lambda'\Delta(c,\varphi)}{1 + \sin.\lambda'\Delta(c,\varphi)};$$

quantité qui devient égale à l'unité, dans l'hypothèse de $\lambda' = o$; mais alors il n'y a plus de kappa.

Nous reviendrons sur ce sujet au chapitre XIII.

CHAPITRE VIII.

Développement des fonctions elliptiques en séries.

§ 69. Les fonctions elliptiques sont susceptibles d'être développées en séries très-convergentes, dont tous les termes sont des fonctions connues de l'amplitude. L'utilité des développements de cette espèce, pour la solution d'une foule de problèmes d'analyse appliquée à la physique et à la mécanique, nous a engagé à faire sur cet sujet des recherches nouvelles, dont nous allons exposer les résultats (*).

Développements des digamma. Si l'on fait $\sin.\varphi = x$ dans l'équation

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}} = \text{dig.}\varphi,$$

celle-ci devient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \text{dig.}\varphi.$$

En développant $\frac{1}{\sqrt{1-c^2x^2}}$ en série, dig.φ devient égal à une suite d'intégrales de la forme $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, qui se rapportent, par conséquent, aux différentielles binomes. Si l'on effectue les calculs, et que l'on

(*) Les séries qui procèdent suivant les sinus ou les cosinus d'arcs multiples, ont été trouvées par Legendre, ainsi que les séries (6) et (11). Le développement de l'arc d'ellipse est donné par plusieurs auteurs.

désigne par A, l'arc dont le sinus est x, il viendra

$$\text{dig.}\varphi = A$$

$$+\frac{1}{2}c^2\left(-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}A\right)$$

$$+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1.3}{2^2}c^4\left[-\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1.3}{2.4}A\right]$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.5}{2^3}c^6\left[-\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1.5}{4.6}x^3+\frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}A\right]$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2^4}c^8\left[-\left(\frac{1}{8}x^7+\frac{1.7}{6.8}x^5+\frac{1.5.7}{4.6.8}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}A\right]$$

$$+\text{ etc.};$$

d'où l'on tirera, en mettant à la place de A, de x et de $\sqrt{1-x^2}$, leurs valeurs φ, $\sin.\varphi$ et $\cos.\varphi$,

$$(1)\ .\ .\ \text{dig.}\varphi = \varphi\left(1+\frac{1^2}{2^2}c^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}c^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}c^6+\text{etc.}\right)$$

$$-\sin.\varphi\cos.\varphi\left[\frac{1.1}{2.2}c^2+\frac{1.3}{2.4}c^4\left(\frac{1}{4}\sin.^2\varphi+\frac{3}{4.2}\right)\right.$$

$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}c^6\left(\frac{1}{6}\sin.^4\varphi+\frac{5}{6.4}\sin.^2\varphi+\frac{5.3}{6.4.2}\right)$$

$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^8\left(\frac{1}{8}\sin.^6\varphi+\frac{7}{8.6}\sin.^4\varphi+\frac{7.5}{8.6.4}\sin.^2\varphi+\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\right)$$

$$\left.+\text{ etc.}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\right].$$

ce qui donne simplement, dans le cas du digamma complet,

$$(2).\ .\ D(c) = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}c^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}c^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}c^6+\text{etc.}\right).$$

Si le module c est très-voisin de l'unité, on obtient une série plus convergente, en développant suivant les puissances de b. Soit donc

$\sin.\varphi = x$: on peut écrire

$$\text{dig.}\varphi = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+b^2x^2(1-x^2)^{-1}}}.$$

Si l'on développe en série le polynome $[1+b^2x^2(1-x^2)^{-1}]^{-\frac{1}{2}}$, on aura à traiter une suite d'intégrales de la forme

$$\int x^m(1-x^2)^{-p}\,dx = \frac{x^{m-1}(1-x^2)^{-p+1}-(m-1)\int x^{m-2}(1-x^2)^{-p+1}dx}{2p-2},$$

qui dépendront toutes de

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}\right) = \log.\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Opérant comme dans le cas qui précède, et réunissant les termes qui multiplient la transcendante $\int \frac{dx}{1-x^2}$, il viendra, toute réduction faite,

$$(3).\ \text{dig.}\varphi = \log.\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\varphi)\left(1+\frac{1^2}{2^2}b^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}b^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}b^6+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{1}{\sin.\varphi}\left[\frac{1}{2}.\frac{1}{2}b^2\text{tang.}^2\varphi-\frac{1.3}{2.4}b^4\left(\frac{1}{4}\text{tang.}^4\varphi-\frac{3}{4.2}\text{tang.}^2\varphi\right)\right.$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}b^6\left(\frac{1}{6}\text{tang.}^6\varphi-\frac{5}{6.4}\text{tang.}^4\varphi+\frac{5.3}{6.4.2}\text{tang.}^2\varphi\right)$$
$$\left.-\text{etc.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

La convergence de cette série n'est assurée que pour autant que $b\,\text{tang.}\varphi$ est moindre que l'unité. Si cette condition ne se trouve point remplie, on se servira de la même formule pour calculer le digamma complémentaire dont l'amplitude ψ est donnée par l'équation $1 = b\,\text{tang.}\varphi\,\text{tang.}\psi$, $\text{tang.}\psi$ étant toujours une fraction dans ce cas. Il ne s'agit plus maintenant, que d'obtenir en fonctions de b, la valeur de la fonction complète D, égale à la somme des deux digamma.

§ 70. Si l'on différentie par rapport à b la fonction

$$\text{dig.}\varphi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\varphi}},$$

on trouve

$$\frac{d.\text{dig.}\varphi}{db} = -b\int \frac{d\varphi \sin.^2\varphi}{\Delta^3} = \frac{b}{c^2}\left(\int \frac{d\varphi}{\Delta} - \int \frac{d\varphi}{\Delta^3}\right);$$

mais d'après le § 43, on a

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2}\,\text{eps.}\varphi - \frac{c^2}{b^2}\frac{\sin.\varphi \cos.\varphi}{\Delta};$$

d'où

$$\frac{d.\text{dig.}\varphi}{db} = \frac{b}{c^2}\,\text{dig.}\varphi - \frac{1}{bc^2}\,\text{eps.}\varphi + \frac{1}{b}\frac{\sin.\varphi \cos.\varphi}{\Delta};$$

et comme le terme $\frac{1}{b}\frac{\sin.\varphi \cos.\varphi}{\Delta}$ disparaît quand $\varphi = 90°$, on tire de cette équation

$$E = b^2 D - b(1-b^2)\frac{dD}{db};$$

ce qui donne, en différentiant,

$$\frac{dE}{db} = b^2\frac{dD}{db} + 2bD - (b-b^3)\frac{d^2D}{db^2} - \frac{dD}{db}(1-3b^2).$$

Mais l'on a aussi

$$\frac{dE}{db} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{d\Delta}{db} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sin.^2\varphi}{\Delta} = \frac{b}{1-b^2}(D-E) \quad (\S\ 14):$$

éliminant E et $\frac{dE}{db}$ entre les trois équations précédentes, il vient finalement

$$(4). \ldots\ldots (1-b^2)\frac{d^2D}{db^2} + \frac{1-3b^2}{b}\cdot\frac{dD}{db} - D = o.$$

C'est là l'équation différentielle dont dépend l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\varphi}} = D.$$

En considérant cette intégrale comme une fonction du module c, on obtient pareillement

$$(5). \ldots\ldots (1-c^2)\frac{d^2D}{dc^2}+\frac{1-3c^2}{c}\cdot\frac{dD}{dc}-D=o;$$

équation semblable à la précédente. Il faut remarquer que la forme de ces équations est telle, que si y est une intégrale particulière de l'une d'elles, Cy en sera une autre, C étant une constante arbitraire.

L'équation (5) établit une relation entre $D(c)$ et le module c, qui doit subsister également entre $D(b)$ et le module b. On a donc aussi

$$(1-b^2)\frac{d^2D(b)}{db^2}+\frac{1-3b^2}{b}\cdot\frac{dD(b)}{db}-D(b)=o:$$

comparant ce résultat à l'équation (4), on voit sur-le-champ que cette équation, qui a pour intégrale $D(c)$, doit aussi admettre pour intégrale $D(b)$.

Il sera démontré au § 88, que si b est assez petit pour qu'on néglige ses puissances supérieures à la première, $D(c)$ a pour valeur approchée $\log.\frac{4}{b}$. Soit donc posé

$$D(c)=P\log.\left(\frac{4}{b}\right)+Q,$$

P et Q étant des suites ordonnées suivant les puissances de b^2: si l'on substitue cette valeur dans l'équation (4), on trouvera que l'équation pour déterminer P, est absolument semblable à celle qui détermine D; d'où il suit que P pourra être représentée par une intégrale particulière de l'équation (4), multipliée par une constante indéterminée. En prenant pour cette intégrale $D(b)$, dont la valeur donnée par l'équation (2) est

$$D(b)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}b^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}b^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}b^6+\text{etc.}\right),$$

on aura, par conséquent,

$$D(c)=C.\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}b^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}b^4+\text{etc.}\right)\log.\left(\frac{4}{b}\right)+Q;$$

et, puisque cette série doit avoir pour premier terme $\log.\frac{4}{b}$, auquel

elle doit se réduire quand on néglige les puissances de b^2, il est évident qu'il faut prendre $C = \frac{2}{\pi}$; d'où

$$P = 1 + \frac{1^2}{2^2} b^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} b^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} b^6 + \text{etc.}$$

Désignant par m', m'', m''', etc., les coefficients des puissances successives de b^2 dans cette série, en sorte qu'on ait

$$P = 1 + m'b^2 + m''b^4 + m'''b^6 + \text{etc.},$$

nous supposerons

$$D(c) = (1 + m'b^2 + m''b^4 + m'''b^6 + \text{etc})\log.\frac{4}{b}$$
$$- m'A'b^2 - m''A''b^4 - m'''A'''b^6 - \text{etc.}:$$

substituant cette valeur dans l'équation (4), on aura, pour déterminer les nouveaux coefficients A', A'', etc., l'équation suivante, dont les termes suivent une loi très-simple,

$o = 2$	$+6m'$	$b^2 + 10m''$	$b^4 + 14m'''$	$b^6 + 18m^{IV}$	$b^8 + \text{etc.}$
$-4m'$	$-8m''$	$-12m'''$	$-16m^{IV}$	$-20m^{V}$	$-\text{etc.}$
$-2^2m'A'$	$-4^2m''A''$	$-6^2m'''A'''$	$-8^2m^{IV}A^{IV}$	$-10^2m^{V}A^{V}$	$-\text{etc.}$
	$+3^2m'A'$	$+5^2m''A''$	$+7^2m'''A'''$	$+9^2m^{IV}A^{IV}$	$+\text{etc.}$

Observant ensuite qu'on a

$$m' = \frac{1}{2^2},$$

$$m'' = \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} = \frac{3^2}{4^2} m',$$

$$m''' = \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} = \frac{5^2}{6^2} m'',$$

etc.,

on trouve successivement

$$A' = 1,$$

$$A'' = 1 + \frac{2}{3.4},$$

$$A''' = 1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{5.6},$$

$$A^{IV} = 1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{5.6} + \frac{2}{7.8},$$

etc.;

de sorte qu'on a, en général,

$$A^{(n)} = A^{(n-1)} + \frac{2}{(2n-1)2n},$$

et que la valeur complète de $D(c)$ se développe ainsi

$$(6).\quad \left\{\begin{aligned} D = \log.\frac{4}{b} &+ \frac{1}{2^2} b^2 \left(\log.\frac{4}{b} - 1\right) \\ &+ \frac{1^2.3^2}{3^2.4^2} b^4 \left(\log.\frac{4}{b} - 1 - \frac{2}{3.4}\right) \\ &+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} b^6 \left(\log.\frac{4}{b} - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6}\right) \\ &+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} b^8 \left(\log.\frac{4}{b} - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6} - \frac{2}{7.8}\right) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Les coefficients A', A'', A''', etc., suivant une marche croissante, on pourrait craindre de tomber sur un coefficient $A^{(n)}$, assez considérable pour rendre divergente la série ci-dessus, à partir du terme correspondant à $A^{(n)}$. Pour nous rassurer à cet égard, cherchons ce que devient $A^{(n)}$ lorsque n est infini, ou, en d'autres termes, sommons la série

$$1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{5.6} + \frac{2}{7.8} + \frac{2}{9.10} + \text{etc.},$$

dont la valeur sera, par conséquent, la limite supérieure des coefficients dont il s'agit. Considérons, à cet effet, la suite

$$u = \frac{2x^2}{1.2} + \frac{2x^4}{3.4} + \frac{2x^6}{5.6} + \text{etc.},$$

qui peut être mise sous la forme

$$u = 2x\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right)$$
$$- \left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \text{etc.}\right).$$

On aura, par la sommation de ces suites,

$$u = x\log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \log.(1-x^2) = (1+x)\log.(1+x) + (1-x)\log.(1-x):$$

faisant $x = 1$, on trouvera $u = 2\log.2 = 1.386$, pour valeur de la série cherchée.

§ 71. Pour développer dig.φ suivant les sinus des multiples de l'amplitude, on commencera par faire

$$(7) \ldots \frac{1}{\Delta} = A - 2A_1\cos.2\varphi + 4A_2\cos.4\varphi - 6A_3\cos.6\varphi + \text{etc.},$$

puis, ayant déterminé A, A_1, A_2, A_3, etc., on multipliera les deux membres par $d\varphi$ et l'on trouvera, en intégrant,

$$\text{dig.}\varphi = A\varphi - A_1\sin.2\varphi + A_2\sin.4\varphi - A_3\sin.6\varphi + \text{etc.}$$

Posons donc

$$c_{,} = \frac{1-b}{1+b}, \quad \sin.\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

on aura

$$\Delta^2 = \frac{(1 + c_{,}e^{2\varphi\sqrt{-1}})(1 + c_{,}e^{-2\varphi\sqrt{-1}})}{(1 + c_{,})^2};$$

d'où

$$\frac{1}{\Delta} = (1+c_{,})(1 + c_{,}e^{2\varphi\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}(1 + c_{,}e^{-2\varphi\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}};$$

et, si l'on représente par P et Q les développements des binomes

$$(1 + c_{,}e^{2\varphi\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} \text{ et } (1 + c_{,}e^{-2\varphi\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire, si l'on fait

$$P = 1 - \frac{1}{2}c_{,}e^{2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}c_{,}^2e^{4\varphi\sqrt{-1}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}c_{,}^3e^{6\varphi\sqrt{-1}} + \text{etc.},$$

$$Q = 1 - \frac{1}{2}c_{,}e^{-2\varphi\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}c_{,}^2e^{-4\varphi\sqrt{-1}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}c_{,}^3e^{-6\varphi\sqrt{-1}} + \text{etc.},$$

on aura

$$\frac{1}{\Delta} = (1+c_{,})PQ.$$

Tout se réduit donc à multiplier entre elles les deux séries précédentes, pour former le terme constant et ceux qui contiennent $\cos.2\varphi$, $\cos.4\varphi$, $\cos.6\varphi$, etc. On trouvera ainsi, pour les coefficients cherchés, les valeurs suivantes, dont la loi est facile à saisir :

$$A=(1+c_{,})\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 c_{,}^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 c_{,}^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 c_{,}^6+\text{etc.}\right],$$

$$A_1=\frac{1+c_{,}}{1}\left[\frac{1}{2}c_{,}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}c_{,}^3+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}c_{,}^5+\text{etc.}\right],$$

$$A_2=\frac{1+c_{,}}{2}\left[\frac{1.3}{2.4}c_{,}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}c_{,}^4+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c_{,}^6+\text{etc.}\right],$$

$$A_3=\frac{1+c_{,}}{3}\left[\frac{1.3.5}{2.4.6}c_{,}^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c_{,}^5+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}c_{,}^7+\text{etc.}\right],$$

$$A_4=\frac{1+c_{,}}{4}\left[\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c_{,}^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}c_{,}^6+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}c_{,}^8+\text{etc.}\right].$$

etc.

On voit par là que la suite $A, A_1, 2A_2, 3A_3, 4A_4$, etc., décroît continuellement, de manière que le rapport d'un terme au précédent approche de plus en plus de la limite $c_{,}$, le décroissement étant plus rapide dans le commencement de la suite. On voit aussi qu'en appelant N le coefficient $\frac{1.3.5.\ldots 2n-1}{2.4.6.\ldots 2n}$, la valeur du coefficient A_n sera toujours comprise entre

$$\frac{1+c_{,}}{n}Nc_{,}^n,\quad \text{et}\ \frac{1+c_{,}}{n}\cdot\frac{Nc_{,}^n}{\sqrt{1-c_{,}^2}}.$$

L'usage des séries précédentes sera d'autant plus avantageux que $c_{,}$ sera plus petit; mais si $c_{,}$ est trop grand pour que ces suites aient une convergence rapide, on multipliera successivement les deux membres de l'équation (7) par $d\varphi$, $d\varphi\cos.2\varphi$, $d\varphi\cos.4\varphi$, etc., et prenant de part et d'autre l'intégrale depuis $\varphi=o$, jusqu'à $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta} = A.\frac{\pi}{2} - A_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.2\varphi.\ 2d\varphi + A_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.4\varphi.\ 4d\varphi - \text{etc.},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos.2\varphi.d\varphi}{\Delta} = A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.2\varphi.d\varphi - 2A_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2 2\varphi.d\varphi + 4A_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.2\varphi.\cos.4\varphi.d\varphi - \text{etc.},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos.4\varphi.d\varphi}{\Delta} = A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.4\varphi.d\varphi - 2A_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.2\varphi.\cos.4\varphi.d\varphi + 4A_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2 4\varphi.\ d\varphi - \text{etc.}$$

. . . . . .

L'intégration des seconds membres de ces équations, ne dépend que de la formule

$$\int \cos.m\varphi.\ \cos.n\varphi.d\varphi = \frac{\sin.(m+n)\varphi}{2(m+n)} + \frac{\sin.(m-n)\varphi}{2(m-n)},$$

dans laquelle le terme $\frac{\sin.(m+n)\varphi}{2(m+n)}$ s'évanouit entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, tandis que le terme $\frac{\sin.(m-n)\varphi}{2(m-n)}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, chaque fois que $m=n$, et a pour valeur vraie, entre les mêmes limites, $\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$. On aura, par conséquent,

$$A.\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta},\ A_1.\frac{\pi}{2} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \cos.2\varphi}{\Delta},\ 2A_2.\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \cos.4\varphi}{\Delta}, \text{ etc.}$$

Remarquons que le cosinus de $2m\varphi$ peut toujours s'exprimer par des puissances entières et positives de $\sin.^2\varphi$: ainsi, chaque coefficient peut se déterminer, en particulier, par une intégrale définie, et toutes ces intégrales ne dépendant que de fonctions de la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\alpha + \beta \sin.^2\varphi + \gamma \sin.^4\varphi + \delta \sin.^6\varphi + \text{etc.}) \frac{d\varphi}{\Delta},$$

elles pourront s'exprimer par les fonctions complètes D et E, qu'on sait évaluer, dans tous les cas, avec la précision nécessaire.

§ 72. *Développements des epsilon.* Pour ces fonctions, la formule analogue à l'équation (1) est

$$(8).\ .\ .\ \text{eps.}\varphi = \varphi\left(1 - \frac{1^2}{2^2}c^2 - \frac{1^2}{2^2.4^2}3c^4 - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}5c^6 - \text{etc.}\right)$$

$$+ \sin.\varphi \cos.\varphi \left[\frac{1.1}{2.2}c^2 + \frac{1}{2.4}c^4\left(\frac{1}{4}\sin.^2\varphi + \frac{3}{4.2}\right)\right.$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.6}c^6\left(\frac{1}{6}\sin.^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin.^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}\right)$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6.8}c^8\left(\frac{1}{8}\sin.^6\varphi + \frac{7}{8.6}\sin.^4\varphi + \frac{7.5}{8.6.4}\sin.^2\varphi + \frac{7.5.3}{8.6.4.2}\right)$$

$$\left. + \text{etc.}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\right];$$

d'où l'on tire, pour l'epsilon complet,

$$(9).\ .\ \text{E} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2}c^2 - \frac{1^2}{2^2.4^2}3c^4 - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}5c^6 - \text{etc.}\right).$$

Dans le cas où c est très-voisin de l'unité, on posera, comme pour les digamma, $\sin.\varphi = x$; d'où

$$\text{eps.}\varphi = \int dx \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{1-x^2}}.$$

Développant le radical en série, on tombera sur des intégrales de la forme $\int x^m (1-x^2)^{-p} dx$ (§ 69) : remettant pour x sa valeur $\sin.\varphi$, on trouvera finalement

$$(10).\ \text{eps.}\varphi = \sin.\varphi - \log.\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\left(\frac{1^2}{2^2}b^2 + \frac{1^2}{2^2.4^2}3b^4 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}5b^6 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{1}{\sin.\varphi}\left[\frac{1.1}{2.2}b^2\text{tang.}^2\varphi - \frac{1}{2.4}b^4\left(\frac{1}{4}\text{tang.}^4\varphi + \frac{3}{4.2}\text{tang.}^2\varphi\right)\right.$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.6}b^6\left(\frac{1}{6}\text{tang.}^6\varphi - \frac{5}{6.4}\text{tang.}^4\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}\text{tang.}^2\varphi\right)$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8}b^8\left(\frac{1}{8}\text{tang.}^8\varphi - \frac{7}{8.6}\text{tang.}^6\varphi + \frac{7.5}{8.6.4}\text{tang.}^4\varphi - \frac{7.5.3}{8.6.4.2}\text{tang.}^2\varphi\right)$$

$$\left. + \text{etc.}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\right].$$

Cette formule n'est convergente, en général, que dans le cas de b tang. $\varphi < 1$. Dans le cas contraire, on opèrera d'une manière analogue à celle qui est indiquée au § 69, en se servant des équations

$$1 = b\,\text{tang.}\varphi\,\text{tang.}\psi,\quad \text{eps.}\varphi + \text{eps.}\psi = \text{E} + c^2\sin.\varphi\sin.\psi.$$

La fonction complète E se déduira de la formule (6), au moyen de la relation $\text{E} = b^2\,\text{D} - (b - b^3)\frac{d\text{D}}{db}$ démontrée au § 70, et l'on trouvera

$$(11).\left\{\begin{aligned}\text{E} = 1 &+ \frac{1}{2}b^2\left(\log.\frac{4}{b} - \frac{1}{1.2}\right)\\ &+ \frac{1^2}{2^2}.\frac{3}{4}b^4\left(\log.\frac{4}{b} - 1 - \frac{1}{3.4}\right)\\ &+ \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\frac{5}{6}b^6\left(\log.\frac{4}{b} - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{1}{5.6}\right)\\ &+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\frac{7}{8}b^8\left(\log.\frac{4}{b} - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6} - \frac{1}{7.8}\right)\\ &+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}.\frac{9}{10}b^{10}\left(\log.\frac{4}{b} - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6} - \frac{2}{7.8} - \frac{1}{9.10}\right)\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Le développement des epsilon suivant les sinus des multiples de l'amplitude, s'obtenant de la même manière que pour les digamma, nous renverrons le lecteur au § précédent.

§ 73. *Développements des kappa circulaires normaux.* Il faut distinguer trois cas. La formule générale étant

$$\text{kap.}\varphi = \int\frac{d\varphi}{(1 - k^2\sin.^2\varphi)\Delta},$$

k désignant $\Delta\,(b, \lambda)$, on peut avoir

1° k et c tous deux très-petits.

Dans ce cas, nous développerons $(1 - k^2\sin.^2\varphi)^{-1}$ et $(1 - c^2\sin.^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$, en deux séries que nous multiplierons l'une par l'autre. Après avoir ordonné d'après les puissances de $\sin.^2\varphi$, nous multiplierons le tout

par $d\varphi$, et nous intègrerons. Faisant alors

$$A = k^2 + \frac{1}{2}c^2,$$

$$A' = k^4 + \frac{1}{2}k^2c^2 + \frac{1.3}{2.4}c^4,$$

$$A'' = k^6 + \frac{1}{2}k^4c^2 + \frac{1.3}{2.4}k^2c^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}c^6,$$

$$A''' = k^8 + \frac{1}{2}k^6c^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4c^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^2c^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^8,$$

$$A^{\text{IV}} = \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .,$$

nous obtiendrons la formule suivante :

(12). . . . . kap.$(-k^2, c, \varphi) =$

$$\varphi\left(1 + \frac{1}{2}A + \frac{1.3}{2.4}A' + \frac{1.3.5}{2.4.6}A'' + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}A''' + \text{etc.}\right)$$

$$-\sin.\varphi\cos.\varphi\left[\frac{1}{2}A + A'\left(\frac{1}{4}\sin.^2\varphi + \frac{3}{4.2}\right) + A''\left(\frac{1}{6}\sin.^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin.^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}\right)\right.$$

$$\left. + A'''\left(\frac{1}{8}\sin.^6\varphi + \frac{7}{8.6}\sin.^4\varphi + \frac{7.5}{8.6.4}\sin.^2\varphi + \frac{7.5.3}{8.6.4.2}\right) + \text{etc.}\right].$$

2° k très-grand, c très-petit.

Par les formules du chapitre V, tout kappa circulaire peut être ramené à un autre kappa dont le paramètre est $n = c\sin.\theta$ (§ 43). Pour opérer comme dans le cas qui précède, il faudra multiplier $(1 + c\sin.\theta.\sin.^2\varphi)^{-1}$ par $(1 - c^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}d\varphi$, puis intégrer. La formule relative à ce cas est, en posant

$$A = c\sin.\theta - \frac{1}{2}c^2,$$

$$A' = c^2\sin.^2\theta - \frac{1}{2}c^3\sin.\theta + \frac{1.3}{2.4}c^4,$$

$$A'' = c^3\sin.^3\theta - \frac{1}{2}c^4\sin.^2\theta + \frac{1.3}{2.4}c^5\sin.\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6}c^6,$$

$$A''' = c^4\sin.^4\theta - \frac{1}{2}c^5\sin.^3\theta + \frac{1.3}{2.4}c^6\sin.^2\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6}c^7\sin.\theta + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}c^8,$$

$$A^{\text{IV}} = \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .,$$

$$(13). \quad \ldots\ldots \quad \text{kap.}(c\sin.\theta, c, \varphi) =$$

$$\varphi\left(1 - \frac{1}{2}A + \frac{1.3}{2.4}A' - \frac{1.3.5}{2.4.6}A'' + \text{etc.}\right)$$

$$+ \sin.\varphi\cos.\varphi\left[\frac{1}{2}A - A'\left(\frac{1}{4}\sin.^2\varphi + \frac{3}{4.2}\right)\right.$$

$$+ A''\left(\frac{1}{6}\sin.^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin.^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}\right)$$

$$\left. - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \right].$$

On peut aussi développer la fonction proposée sans transformation, mais la série est moins régulière que la précédente. Si l'on fait $h^2 = 1 - k^2$, on aura

$$\text{kap.}(-k^2, c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{(\cos.^2\varphi + h^2\sin.^2\varphi)\Delta} = \int \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi(1 + h^2\text{tang.}^2\varphi)\Delta}:$$

développant

$$(1 + h^2\,\text{tang.}^2\varphi)^{-1} \text{ et } (1 - c^2\sin.^2\varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

puis faisant $\sin.\varphi = x$, il viendra, en intégrant,

$$(14). \quad \ldots\ldots \quad \text{kap.}(-k^2, c, \varphi) =$$

$$A - Bh^2 + Ch^4 - Dh^6 + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{2}c^2A_2 - \frac{1}{2}c^2h^2B_2 + \frac{1}{2}c^2h^4C_2 - \frac{1}{2}c^2h^6D_2 + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}c^4A_4 - \frac{1.3}{2.4}c^4h^2B_4 + \frac{1.3}{2.4}c^4h^4C_4 - \frac{1.3}{2.4}c^4h^6D_4 + \text{etc.}$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}c^6A_6 - \frac{1.3.5}{2.4.6}c^6h^2B_6 + \frac{1.3.5}{2.4.6}c^6h^4C_6 - \frac{1.3.5}{2.4.6}c^6h^6D_6 + \text{etc.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1.3.5.\ldots n-1}{2.4.6.\ldots n}c^nA_n - \text{etc.};$$

série dans laquelle on a employé les abréviations suivantes :

$$A = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{tang.}\varphi,$$

$$B = \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}\frac{\text{tang.}^3\varphi}{\sin.^2\varphi} - \frac{1}{3}A,$$

$$C = \int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{5}\frac{\text{tang.}^5\varphi}{\sin.^2\varphi} - \frac{3}{5}B,$$

$$D = \int \frac{x^6 dx}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{7}\frac{\text{tang.}^7\varphi}{\sin.^2\varphi} - \frac{5}{7}C,$$

. . . . . .

$$A_2 = \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{tang.}\varphi - \varphi,$$

$$B_2 = \int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}\text{tang.}^3\varphi - A_2,$$

$$C_2 = \int \frac{x^6 dx}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{5}\text{tang.}^5\varphi - B_2,$$

$$D_2 = \int \frac{x^8 dx}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{7}\text{tang.}^7\varphi - C_2,$$

. . . . . .

$$A_4 = \int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \sin.^2\varphi\,\text{tang.}\varphi + \frac{3}{2}\sin.\varphi\cos.\varphi - \frac{3}{2}\varphi,$$

$$B_4 = \int \frac{x^6 dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}\sin.^2\varphi.\,\text{tang.}^3\varphi - \frac{5}{3}A_4,$$

$$C_4 = \int \frac{x^8 dx}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{5}\sin.^2\varphi\,\text{tang.}^5\varphi - \frac{7}{5}B_4,$$

$$D_4 = \int \frac{x^{10} dx}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{7}\sin.^2\varphi\,\text{tang.}^7\varphi - \frac{9}{7}C_4,$$

. . . . . .

$$A_6 = \int \frac{x^6 dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \sin.^4\varphi \tang.\varphi + \left(\frac{5}{4}\sin.^3\varphi + \frac{1.3.5}{2.4}\sin.\varphi\right)\cos.\varphi - \frac{1.3.5}{2.4}\varphi,$$

$$B_6 = \int \frac{x^8 dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}\sin.^4\varphi \tang.^3\varphi - \frac{7}{3}A_6,$$

$$C_6 = \int \frac{x^{10} dx}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{5}\sin.^4\varphi \tang.^5\varphi - \frac{9}{5}B_6,$$

$$D_6 = \int \frac{x^{12} dx}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{7}\sin.^4\varphi \tang.^7\varphi - \frac{11}{7}C_6,$$

. . . . . .

$$A_n = \int \frac{x^n dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \text{etc.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

La formule (14) peut être divergente, si φ n'est pas suffisamment petit. Dans ce cas, et en général dans tous ceux où une fonction de troisième espèce se développera en série ascendante, suivant les puissances de tang.φ, on commencera par ramener le kappa proposé à un autre kappa d'une amplitude moindre, au moyen de la formule du § 53,

$$\text{kap.}\varphi + \text{kap.}\psi - K = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{arc}\left(\tang. = \frac{n\sqrt{\alpha}}{1+n}\frac{\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta}\right),$$

dans laquelle $\psi = \text{amp.}(D - \text{dig.}\,\varphi)$.

3° k et c tous deux très-grands.

Ayant remplacé k^2 et c^2 par leurs valeurs $1 - h^2$ et $1 - b^2$, on aura à intégrer la différentielle

$$\frac{d\varphi}{\cos.^3\varphi(1 + h^2\tang.^2\varphi)\sqrt{1 + b^2\tang.^2\varphi}},$$

dans laquelle on remplacera $(1+h^2\tang.^2\varphi)^{-1}$ et $(1+b^2\tang.^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ par leurs développements en séries. On trouvera, pour résultat de l'intégration,

$$(15). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{kap.}(-k^2, c, \varphi) =$$

$$\frac{1}{2}\log.\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)\left(1 + \frac{1}{4}A + \frac{1.3}{4.6}A' + \frac{1.3.5}{4.6.8}A'' + \text{etc.}\right)$$

$$+ \sin.\varphi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos.^2\varphi} - A\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos.^4\varphi} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos.^2\varphi}\right)\right.$$

$$+ A'\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin.^2\varphi}{\cos.^6\varphi} - \frac{3.1}{6.4}\cdot\frac{1}{\cos.^4\varphi} + \frac{3.1.1}{6.4.2}\cdot\frac{1}{\cos.^2\varphi}\right)$$

$$- A''\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin.^4\varphi}{\cos.^8\varphi} - \frac{5.1}{8.6}\cdot\frac{\sin.^2\varphi}{\cos.^6\varphi} + \frac{5.3.1}{8.6.4}\cdot\frac{1}{\cos.^4\varphi} - \frac{5.3.1.1}{8.6.4.2}\cdot\frac{1}{\cos.^2\varphi}\right)$$

$$\left. + \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right];$$

formule dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$A = h^2 + \frac{1}{2}b^2,$$

$$A' = h^4 + \frac{1}{2}b^2h^2 + \frac{1.3}{2.4}b^4,$$

$$A'' = h^6 + \frac{1}{2}b^2h^4 + \frac{1.3}{2.4}b^4h^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}b^6,$$

etc.

Elle peut devenir divergente, par les valeurs considérables que prennent les fonctions de φ qui multiplient A, A′, A″, etc., lorsque φ surpasse une certaine limite. Dans ce cas, on remplacera la fonction proposée kap. $(-k^2, c, \varphi)$ = kac. (λ, c, φ), par la fonction kac. (φ, b, λ), au moyen de la formule (e) du § 56. Ce nouveau kappa, ayant pour paramètre $-k'^2 = -(1 - c^2 \sin.^2\varphi)$, et pour module b, quantité très-petite dans le cas actuel, on pourra le calculer par la formule (12), si l'amplitude φ est très-grande, et par la formule (13), si cette amplitude est tellement petite, que le paramètre $-k'^2$ soit voisin de l'unité négative.

§ 74. Si l'on voulait développer la fonction générale

$$\text{kap.}(n, c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{(1 + n\sin.^2\varphi)^\Delta},$$

suivant les sinus des multiples pairs de l'amplitude, il faudrait supposer

$$\text{kap.}(n, c, \varphi) = M\varphi - M_1 \sin.2\varphi + M_2 \sin.4\varphi - M_3 \sin.6\varphi + \text{etc.},$$

et l'on aurait pour déterminer les coefficients M, M_1, etc., l'identité

$$(16). \frac{1}{(1 + n \sin.^2\varphi)\Delta} = M - 2M_1 \cos.2\varphi + 4M_2 \cos.4\varphi - 6M_3 \cos.6\varphi + \text{etc.}$$

Si l'on fait $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura $K(n, c) = M.\frac{1}{2}\pi$: ainsi le coefficient M est déterminé par la fonction complète K, dont on connaît la valeur en digamma et en epsilon (chap. VI). On pourrait, de même, déterminer M_1, M_2, etc., par la méthode suivie au § 71 pour les digamma, et l'on obtiendrait, pour valeurs de ces coefficients, les intégrales suivantes, prises depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$,

$$M_1 = \frac{-2}{\pi} \int \frac{d\varphi.\cos.2\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\Delta},$$

$$2M_2 = \frac{2}{\pi} \int \frac{d\varphi.\cos.4\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\Delta},$$

$$3M_3 = \frac{-2}{\pi} \int \frac{d\varphi.\cos.6\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\Delta},$$

etc. . . . . .

Mais, quoique ces intégrales puissent être exprimées au moyen des fonctions de la première et de la seconde espèce, elles ne peuvent guère être utiles dans la pratique, à cause de leur complication toujours croissante, et parce qu'elles contiennent comme diviseurs, des puissances de plus en plus élevées du paramètre n qui peut être très-petit. Il faut donc avoir recours à d'autres moyens.

Si l'on développe la fraction $\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos.z+\alpha^2}$, en série ascendante suivant les puissances de α, par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos.z+\alpha^2} = 1 + 2\alpha\cos.z + 2\alpha^2\cos.2z + 2\alpha^3\cos.3z \ldots\ldots + 2\alpha^m\cos.mz,$$

comme il est aisé de le vérifier ; car si l'on multiplie cette série par le dénominateur $1 - 2\alpha\cos.z + \alpha^2$, on retrouve le numérateur $1 - \alpha^2$,

en observant que

$$2\cos.mz.\cos.z = \cos.(m+1)z + \cos.(m-1)z\,,$$

quel que soit m.

Faisons dans le développement qui précède,

$$z = 2\varphi,\quad \alpha = \frac{\sqrt{1+n}-1}{\sqrt{1+n}+1},\quad \cos.z = 1 - 2\sin.^2\varphi,$$

et nous obtiendrons

$$\frac{\sqrt{1+n}}{1+n\sin.^2\varphi} = 1 + 2\alpha\cos.2\varphi + 2\alpha^2\cos.4\varphi + 2\alpha^3\cos.6\varphi + \text{etc.}$$

D'un autre côté, on est censé connaître les coefficients A, A_1, A_2, A_3, etc., qui satisfont à l'équation du § 71,

$$\frac{1}{\Delta} = A - 2A_1\cos.2\varphi + 4A_2\cos.4\varphi - 6A_3\cos.6\varphi + \text{etc.}:$$

il ne s'agit donc que de multiplier les seconds membres des deux équations précédentes, et d'en égaler le produit, comparé au premier membre de l'équation (16), à la suite

$$h\,(M - 2M_1\cos.2\varphi + 4M_2\cos.4\varphi - 6M_3\cos.6\varphi + \text{etc.}),$$

dans laquelle $h = \sqrt{1+n}$. Ce produit, convenablement disposé, donnera les valeurs suivantes des coefficients que l'on cherche :

$$hM = A - 2\alpha A_1 + 4\alpha^2 A_2 - 6\alpha^3 A_3 + 8\alpha^4 A_4 - \text{etc.},$$

$$-2hM_1 = \begin{cases} \alpha\,(hM + A) \\ -2A_1 + 4\alpha A_2 - 6\alpha^2 A_3 + 8\alpha^3 A_4 - \text{etc.}, \end{cases}$$

$$4hM_2 = \begin{cases} \alpha^2(hM + A) - 2\alpha A_1 \\ +4A_2 - 6\alpha A_3 + 8\alpha^2 A_4 - 10\alpha^3 A_5 + \text{etc.}, \end{cases}$$

$$-6hM_3 = \begin{cases} \alpha^3(hM + A) - 2\alpha^2 A_1 + 4\alpha A_2 \\ -6A_3 + 8\alpha A_4 - 10\alpha^2 A_5 + \text{etc.}, \end{cases}$$

$$8hM_4 = \begin{cases} \alpha^4(hM + A) - 2\alpha^3 A_1 + 4\alpha^2 A_2 - 6\alpha A_3 \\ +8A_4 - 10\alpha A_5 + 12\alpha^2 A_6 - \text{etc.}, \end{cases}$$

etc.

La loi de ces expressions est très-facile à saisir ; d'ailleurs connaissant déjà les coefficients A, A_1, etc., et la constante α étant toujours une fraction assez petite, il est clair qu'on pourra prolonger indéfiniment le calcul des coefficients M, M_1, etc., sans craindre de multiplier les erreurs ; avantage qu'on n'obtiendrait, peut-être, par aucune autre méthode. On aura donc, avec toute la précision nécessaire, le développement cherché.

§ 75. Les kappa circulaires ne paraissant point susceptibles d'être ramenés à des fonctions plus simples, les développements (12) et (13) peuvent être d'une grande utilité dans la pratique, pour le calcul de ces transcendantes.

Ces développements se composent de deux espèces de fonctions auxiliaires : les unes A, A′, A″, etc., qui ne contiennent que le paramètre et le module, les autres qui ne contiennent que l'amplitude. Désignons ces dernières par Φ_1, Φ_2, Φ_3, etc., en sorte que

$$\Phi_1 = \frac{1}{4}\sin.^2\varphi + \frac{3}{4.2},$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{6}\sin.^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin.^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2},$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{8}\sin.^6\varphi + \frac{7}{8.6}\sin.^4\varphi + \frac{7.5}{8.6.4}\sin.^2\varphi + \frac{7.5.3}{8.6.4.2},$$

etc.

Si l'on remarque que ces fonctions Φ se trouvent également dans les séries relatives aux digamma et aux epsilon ; que de plus, elles donnent, par un calcul très-simple, la valeur des intégrales de la forme $\int \frac{x^{2m}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, qui se rencontrent si fréquemment en analyse, on reconnaîtra que la construction de tables pour les fonctions Φ, serait à comparer, pour l'utilité, à celle des tables elliptiques, sans offrir les mêmes difficultés, puisque ces tables seraient à simple entrée.

Quant aux coefficients A, A′, A″, etc., ils se déduisent l'un de l'autre suivant une loi très-simple, qui est :

Pour la formule (12)

$$A^{(\mu)} = A^{(\mu-1)}k^2 + \frac{1.3.5.....2\mu+1}{2.4.6.....2\mu+2}c^{2\mu+2},$$

et pour la formule (13)

$$A^{(\mu)} = A^{(\mu-1)} c \sin.\vartheta \mp \frac{1.3.5.....2\mu+1}{2.4.6.....2\mu+2} c^{2\mu+2},$$

le signe supérieur se rapportant au cas où μ est pair, et le signe inférieur au cas où μ est impair.

§ 76. *Développements des kappa logarithmiques normaux.*

Le paramètre $n = -c^2 \sin.^2 \lambda$ étant représenté par $-k^2$, comme pour les kappa circulaires, nous aurons également trois cas à considérer :

1° Celui où k et c sont tous deux très-petits.

2° Celui où ils sont tous deux très-grands.

3° Celui où k est très-petit et c très-grand.

Dans les deux premiers cas, le développement sera donné par les formules (12) et (15) du § 73. Dans le troisième, on développera en séries $(1-k^2 \sin.^2\varphi)^{-1}$ et $(1+b^2 \tang.^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$, qui entrent dans l'expression

$$\text{kap.}(-k^2, c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin.^2\varphi)\Delta} = \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi (1-k^2 \sin.^2\varphi)\sqrt{1+b^2 \tang.^2\varphi}},$$

et l'on trouvera, par la même méthode que nous avons suivie à l'égard des kappa circulaires,

$$\begin{aligned}
(17) \quad \ldots\ldots \quad \text{kap.}(-k^2, c, \varphi) = \\
& A - \frac{1}{2} b^2 B + \frac{1.3}{2.4} b^4 C - \frac{1.3.5}{2.4.6} b^6 D + \text{etc.} \\
& - k^2 A_2 + \frac{1}{2} k^2 b^2 B_2 - \frac{1.3}{2.4} k^2 b^4 C_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^2 b^6 D_2 + \text{etc.} \\
& + k^4 A_4 - \frac{1}{2} k^4 b^2 B_4 + \frac{1.3}{2.4} k^4 b^4 C_4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} k^4 b^6 D_4 + \text{etc.} \\
& - k^6 A_6 + \frac{1}{2} k^6 b^2 B_6 - \frac{1.3}{2.4} k^6 b^4 C_6 + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 b^6 D_6 + \text{etc.} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \pm k^n A_n \mp \text{etc.} ;
\end{aligned}$$

formule dans laquelle on a, en désignant sin. φ par x,

$$A = \int \frac{dx}{1-x^2} = \log.\ \text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$B = \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin.\varphi}{\cos.^2\varphi} - \frac{1}{2} A,$$

$$C = \int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^3} = \frac{1}{4}\frac{\sin.^3\varphi}{\cos.^4\varphi} - \frac{3}{4} B,$$

$$D = \int \frac{x^6 dx}{(1-x^2)^4} = \frac{1}{6}\frac{\sin.^5\varphi}{\cos.^6\varphi} - \frac{5}{6} C,$$

. . . . . .

$$A_2 = \int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = -\sin.\ \varphi + \log.\ \text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$B_2 = \int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin.^3\varphi}{\cos.^2\varphi} - \frac{3}{2} A_2,$$

$$C_2 = \int \frac{x^6 dx}{(1-x^2)^3} = \frac{1}{4}\frac{\sin.^5\varphi}{\cos.^4\varphi} - \frac{5}{4} B_2,$$

$$D_2 = \int \frac{x^8 dx}{(1-x^2)^4} = \frac{1}{6}\frac{\sin.^7\varphi}{\cos.^6\varphi} - \frac{7}{6} C_2,$$

. . . . . .

$$A_4 = \int \frac{x^4 dx}{1-x^2} = -\frac{\sin.^3\varphi}{3} - \frac{\sin.\varphi}{1} + \log.\text{tang.}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$B_4 = \int \frac{x^6 dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin.^5\varphi}{\cos.^2\varphi} - \frac{5}{2} A_4,$$

$$C_4 = \int \frac{x^8 dx}{(1-x^2)^3} = \frac{1}{4}\frac{\sin.^7\varphi}{\cos.^4\varphi} - \frac{7}{4} B_4,$$

$$D_4 = \int \frac{x^{10} dx}{(1-x^2)^4} = \frac{1}{6}\frac{\sin.^9\varphi}{\cos.^6\varphi} - \frac{9}{6} C_4,$$

. . . . . .

$$A_6 = \int \frac{x^6 dx}{1-x^2} = -\frac{\sin.^5\varphi}{5} - \frac{\sin.^3\varphi}{3} - \frac{\sin.\varphi}{1} + \log.\tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$B_6 = \int \frac{x^8 dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin.^7\varphi}{\cos.^2\varphi} - \frac{7}{2} A_6,$$

$$C_6 = \int \frac{x^{10} dx}{(1-x^2)^3} = \frac{1}{4}\frac{\sin.^9\varphi}{\cos.^4\varphi} - \frac{9}{4} B_6,$$

$$D_6 = \int \frac{x^{12} dx}{(1-x^2)^4} = \frac{1}{6}\frac{\sin.^{11}\varphi}{\cos.^6\varphi} - \frac{11}{6} C_6,$$

. . . . . .

$$A_n = \int \frac{x^n dx}{1-x^2} = \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

La remarque que nous avons faite au § 73, sur la formule (15), s'applique également à la formule précédente, et l'on pourra, comme pour les kappa circulaires, permuter avec avantage l'amplitude et l'angle du paramètre. En effet, puisque $k^2 = c^2 \sin.^2\lambda$ est très-petit, tandis que c est voisin de l'unité, il faut que l'angle λ soit très-petit; de manière que si la série est divergente pour l'amplitude φ, elle sera très-convergente, au contraire, pour l'amplitude λ.

La méthode exposée au § 74, étant commune aux deux classes de kappa, nous ne nous occuperons pas du développement des kappa logarithmiques, suivant les sinus des multiples de l'amplitude.

§ 77. M. *Gudermann*, professeur de mathématiques à Munster, a publié en 1837, dans le tome XVI du journal de M. Crelle, une nouvelle formule d'approximation pour les digamma, que nous allons exposer.

Soit

$$c = \sin.\theta, \quad \text{dig.}\varphi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin.^2\theta \sin.^2\varphi}} :$$

Si l'on pose $t = \tang.\frac{1}{2}\varphi$, il viendra

$$\sin.\varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos.\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \Delta(\varphi) = \frac{\sqrt{1 + 2\cos.2\theta.t^2 + t^4}}{1+t^2};$$

d'où

$$\text{dig.}\,\varphi = \int \frac{2dt}{\sqrt{1 + 2\cos.2\theta t^2 + t^4}}.$$

Développant le radical en série, on aura l'identité

$$(1+2\cos.2\theta.t^2+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{A_1}{1}t^2 + \frac{A_2}{1.2}t^4 - \frac{A_3}{1.2.3}t^6 + \frac{A_4}{1.2.3.4}t^8 - \text{etc.},$$

dans laquelle les fonctions A_1, A_2, A_3, etc., sont soumises à l'échelle de relation

$$A_n = (2n-1)\cos.2\theta.A_{n-1} - (n-1)^2 A_{n-2},$$

qui donne successivement

$$\begin{aligned}
A_1 &= \cos.2\theta,\\
A_2 &= 3\cos.^2 2\theta - 1,\\
A_3 &= 3.5\cos.^3 2\theta - 9\cos.2\theta,\\
A_4 &= 3.5.7\cos.^4 2\theta - 90\cos.^2 2\theta + 9,\\
A_5 &= 3.5.7.9\cos.^5 2\theta - 1050\cos.^3 2\theta + 225\cos.2\theta,\\
A_6 &= 3.5.7.9.11\cos.^6 2\theta - 14175\cos.^4 2\theta + 4725\cos.^2 2\theta - 225,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

La loi que suivent les coefficients des puissances de $\cos.2\theta$, ne s'aperçoit par sur-le-champ. Cependant, il est certain que les rapports $\frac{A_1}{1}$, $\frac{A_2}{1.2}$, $\frac{A_5}{1.2.3}$, etc., sont tous moindres que l'unité, positive ou négative. En effet, les limites de $\cos.2\theta$ étant 1 et -1, qui répondent à $\theta = o$ et à $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a, pour $\cos.2\theta = 1$,

$$(1+t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - t^{10} + \text{etc.};$$

d'où

$$\frac{A_1}{1} = 1,\ \frac{A_2}{1.2} = 1,\ \frac{A_3}{1.2.3} = 1,\ \frac{A_4}{1.2.3.4} = 1,\ \text{etc.};$$

et pour $\cos.2\theta = -1$,

$$(1-t^2)^{-1} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + \text{etc.};$$

d'où

$$\frac{A_1}{1} = -1,\ \frac{A_2}{1.2} = 1,\ \frac{A_3}{1.2.3} = -1,\ \frac{A_4}{1.2.3.4} = 1,\ \text{etc.}:$$

la convergence de la série dépendra donc uniquement de la petitesse de t, dont la plus grande valeur est l'unité positive.

Le développement du radical, étant multiplié par $2dt$ et intégré, on obtient

$$(18)\ .\ .\ \text{dig.}(c, \varphi) = 2\left(t - \frac{A_1}{1}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{A_2}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{A_3}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{A_4}{1.2.3.4}\cdot\frac{t^9}{9} - \text{etc.}\right).$$

Si l'on change θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$, dans les fonctions A, et dans

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin.^2\theta \sin.^2\varphi}},$$

ce digamma deviendra dig. (b, φ); de plus, les fonctions A d'indice impair, telles que A_1, A_3, A_5, etc., changeront de signe, tandis que celles d'indice pair resteront les mêmes. Il suit de là que

$$(19)\ .\ .\ \text{dig.}(b, \varphi) = 2\left(t + \frac{A_1}{1}\cdot\frac{t^3}{3} + \frac{A_2}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{A_3}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7} + \text{etc.}\right).$$

Au moyen des deux formules précédentes, il sera facile de calculer simultanément la fonction dig. (c, φ), et la fonction dig. (b, φ) relative au module complémentaire.

Lorsque $\theta = o$, on a dig. $\varphi = \varphi$, $\frac{A_1}{1} = \frac{A_2}{1.2} = \frac{A_3}{1.2.3} = \text{etc.} = 1$, et l'on obtient

$$\varphi = 2\left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \text{etc.}\right);$$

ce qui offre le développement connu de l'arc en fonction de sa tangente, puisque $t = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\varphi$.

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\text{dig.}\,\varphi = \int\frac{d\varphi}{\cos.\,\varphi} = \log.\ \text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi),$$

fonction qui devient infinie pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ces valeurs de θ et de φ, substituées dans la formule (18), donnent

$$\text{dig.}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{etc.}\right):$$

ainsi la série entre parenthèses, a pour valeur l'infini; résultat connu d'ailleurs.

CHAPITRE IX.

Transformation du module dans les digamma.

§ 78. Jusqu'à présent nous n'avons comparé entre eux que des digamma de même module : c'est ici le lieu de faire connaître une loi très-simple, pour former une suite infinie de digamma, qui diffèrent les uns des autres, tant par le module que par l'amplitude.

Considérons les deux fonctions

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta(c, \varphi)}, \quad \text{dig.}(c', \varphi') = \int \frac{d\varphi'}{\Delta(c', \varphi')} :$$

je dis que si l'on fait

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1 + c},$$

et que l'on détermine φ' d'après l'équation

$$\sin.(2\varphi' - \varphi) = c \sin.\varphi,$$

on aura généralement

$$\text{dig.}(c', \varphi') = \frac{1 + c}{2} \text{dig.}(c, \varphi).$$

En effet, la relation supposée entre φ et φ' donne d'abord

$$\cos.(2\varphi' - \varphi) = \Delta ;$$

d'où

$$\cos.(2\varphi' - \varphi) \cos.\varphi - \sin.(2\varphi' - \varphi) \sin.\varphi = \Delta \cos.\varphi - c \sin.^2\varphi ;$$

mais le premier membre de cette équation revient à cos. $2\varphi'$: donc

$$\cos.2\varphi' = \Delta, \cos.\varphi - c \sin.^2\varphi,$$

$$2\cos.^2\varphi' = 1 - c\sin.^2\varphi + \Delta\cos.\varphi,$$

$$2\sin.^2\varphi' = 1 + c\sin.^2\varphi - \Delta\cos.\varphi,$$

$$2\sin.\varphi'\cos.\varphi' = \sin.\varphi(c\cos.\varphi + \Delta),$$

$$2d\varphi' = \frac{d\varphi}{\Delta}(c\cos.\varphi + \Delta),$$

$$\Delta(c', \varphi') = \frac{c\cos.\varphi + \Delta}{1 + c}.$$

Des deux dernières équations on tire

$$\frac{d\varphi'}{\Delta(c', \varphi')} = \frac{1 + c}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(c, \varphi)};$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\text{dig.}(c', \varphi') = \frac{1 + c}{2}\,\text{dig.}(c, \varphi).$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parce que les amplitudes φ et φ' s'évanouissent en même temps.

On voit, par ce résultat, que les fonctions dig.(c', φ'), dig.(c, φ), seront entre elles dans un rapport indépendant des amplitudes φ et φ'. Si l'on fait $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$\text{dig.}(c', \varphi') = \text{D}(c'),\ \sin.(\pi - \varphi) = c\sin.\varphi,\ \cos.(\pi - \varphi) = \Delta :$$

or Δ étant toujours positif (§ 8), la plus petite valeur de φ qui satisfait à cette expression de cos. $(\pi - \varphi)$, est $\varphi = \pi$; ce qui donne dig. $(c, \varphi) = 2\text{D}(c)$, et les fonctions complètes $\text{D}(c)$ et $\text{D}(c')$, ont entre elles cette relation très-simple

$$\text{D}(c') = (1 + c)\text{D}(c).$$

§ 79. Concevons maintenant, qu'à partir du terme donné c, on forme une suite infinie de modules c', c'', c''', etc., d'après la loi

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1 + c},\quad c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1 + c'},\quad c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1 + c''},\ \text{etc.}:$$

cette suite de modules, qui est continuellement croissante, aura pour limite l'unité, et atteindra sensiblement cette limite au bout d'un assez petit nombre de termes.

Si l'on appelle, par analogie, b', b'', b''', etc., les compléments des modules c', c'', c''', etc., la suite b', b'', b''', etc., sera continuellement décroissante, et chaque terme se déduira du module précédent, suivant cette loi

$$b' = \frac{1-c}{1+c}, \quad b'' = \frac{1-c'}{1+c'}, \quad b''' = \frac{1-c''}{1+c''}, \text{ etc.}$$

Soit ensuite φ, φ', φ'', φ''', etc., la série des amplitudes qui se déduisent chacune de la précédente, par les formules

$$\begin{aligned}
&\sin.(2\varphi' - \varphi) = c \sin.\varphi,\\
&\sin.(2\varphi'' - \varphi') = c' \sin.\varphi',\\
&\sin.(2\varphi''' - \varphi'') = c'' \sin.\varphi'',\\
&\text{etc. :}
\end{aligned}$$

on formera, de cette manière, une suite infinie de digamma entre lesquels on aura les équations

$$\text{dig.}(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} \cdot \text{dig.}(c, \varphi),$$

$$\text{dig.}(c'', \varphi'') = \frac{1+c'}{2} \cdot \text{dig.}(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} \cdot \frac{1+c'}{2} \cdot \text{dig.}(c, \varphi),$$

$$\text{dig.}(c''', \varphi''') = \frac{1+c''}{2} \cdot \text{dig.}(c'', \varphi'') = \frac{1+c}{2} \cdot \frac{1+c'}{2} \cdot \frac{1+c''}{2} \cdot \text{dig.}(c, \varphi),$$

etc. etc.

Quant aux fonctions complètes, l'équation $D(c') = (1+c)D(c)$ déjà trouvée, donnera successivement

$$\begin{aligned}
D(c') &= (1+c)D(c),\\
D(c'') &= (1+c')D(c') = (1+c)(1+c')D(c),\\
D(c''') &= (1+c'')D(c'') = (1+c)(1+c')(1+c'')D(c),\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

§ 80. On peut encore donner à ces résultats une plus grande extension. En effet, la suite infinie de modules c, c', c'', etc., qui est croissante dans un sens, et qui a pour limite l'unité, peut être prolongée à l'infini dans le sens contraire, où elle sera décroissante et aura pour limite zéro. Désignons par c, $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, etc., cette suite décroissante : la loi qui lie deux termes consécutifs sera semblablement

$$c = \frac{2\sqrt{c_{,}}}{1+c_{,}},\quad c_{,} = \frac{2\sqrt{c_{,,}}}{1+c_{,,}},\quad c_{,,} = \frac{2\sqrt{c_{,,,}}}{1+c_{,,,}},\ \text{etc.};$$

mais pour former chaque terme au moyen du précédent, il sera plus simple d'employer les compléments b, $b_{,}$, $b_{,,}$, $b_{,,,}$, etc., des modules c, $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, etc.

Si l'on remarque que de l'équation $b' = \frac{1-c}{1+c}$ on déduit $c = \frac{1-b'}{1+b'}$, on obtiendra, en éliminant c entre les équations $c = \frac{2\sqrt{c_{,}}}{1+c_{,}}$ et $c^2 = 1 - b^2$, la relation

$$c_{,} = \frac{1-b}{1+b};$$

d'où l'on conclura la suite d'équations

$$c_{,} = \frac{1-b}{1+b},\quad c_{,,} = \frac{1-b_{,}}{1+b_{,}},\quad c_{,,,} = \frac{1-b_{,,}}{1+b_{,,}},\ \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on désigne par φ, $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, etc., la série des amplitudes correspondantes aux modules c, $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, etc., on aura d'abord

$$\sin.(2\varphi - \varphi_{,}) = c_{,} \sin.\varphi_{,};$$

équation qu'il faut résoudre pour déduire $\varphi_{,}$ de φ. On en tire successivement

$$\sin.\varphi_{,} = (1+b)\frac{\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta},\ \cos.\varphi_{,} = \frac{1-(1+b)\sin.^2\varphi}{\Delta},$$

$$\Delta(c_{,},\ \varphi_{,}) = \frac{1-(1-b)\sin.^2\varphi}{\Delta},\ \tang.\varphi_{,} = \frac{(1+b)\tang.\varphi}{1-b\tang.^2\varphi}.$$

Cette dernière peut se mettre sous la forme

$$\text{tang.}\,(\varphi_{,} - \varphi) = b\ \text{tang.}\,\varphi,$$

et l'on calculera successivement les amplitudes $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, etc., par les formules

$$\text{tang.}\,(\varphi_{,,} - \varphi_{,}) = b_{,}\ \text{tang.}\,\varphi_{,},$$
$$\text{tang.}\,(\varphi_{,,,} - \varphi_{,,}) = b_{,,}\ \text{tang.}\,\varphi_{,,},$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

La suite des modules croissants c, c', c'', etc., dont la limite est l'unité, et la suite des modules décroissants $c_{,}, c_{,,}, c_{,,,}$, etc., dont la limite est zéro, n'en forment qu'une seule, liée par la même loi, et qu'on peut écrire ainsi

limite 0) . . . $c_{,,,}, c_{,,}, c_{,}, c, c', c'', c'''$ . . . (limite 1.

Cette suite, qui peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens, est ce qu'on appelle une *échelle de modules*. Les amplitudes correspondantes à deux termes consécutifs, sont liées par la formule générale

$$\text{tang.}\,\left(\varphi^{(\mu)} - \varphi^{(\mu+1)}\right) = b^{(\mu+1)}\ \text{tang.}\,\varphi^{(\mu+1)},$$

ou

$$\text{sin.}\,\left(2\varphi^{(\mu+1)} - \varphi^{(\mu)}\right) = c^{(\mu)}\ \text{sin.}\,\varphi^{(\mu)}.$$

§ 81. D'après ce qui précède, on pourra former la suite infinie de digamma, dont les modules suivront une marche décroissante,

$$(1)\ .\ .\ .\ \begin{cases} \text{dig.}\,(c,\ \varphi) = \dfrac{1 + c_{,}}{2}\ \text{dig.}\,(c_{,},\ \varphi_{,}), \\ \text{dig.}\,(c_{,},\ \varphi_{,}) = \dfrac{1 + c_{,,}}{2}\ \text{dig.}\,(c_{,,},\ \varphi_{,,}), \\ \text{dig.}\,(c_{,,},\ \varphi_{,,}) = \dfrac{1 + c_{,,,}}{2}\ \text{dig.}\,(c_{,,,},\ \varphi_{,,,}), \\ \text{etc.} \end{cases}$$

et parce que $1 + c_{,} = \frac{2}{1+b}$, il vient successivement

$$\text{dig.}\,(c_{,},\ \varphi_{,}) = (1 + b)\ \text{dig.}\,(c,\ \varphi),$$
$$\text{dig.}\,(c_{,,},\ \varphi_{,,}) = (1 + b_{,})\ \text{dig.}\,(c_{,},\ \varphi_{,}) = (1 + b_{,})\,(1 + b_{,,})\ \text{dig.}\,(c,\ \varphi),$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Quant aux fonctions complètes, puisque $D(c') = (1 + c)\, D(c)$, on a également $D(c) = (1 + c_,)\, D(c_,)$; d'où

$$D(c_,) = \frac{1}{1 + c_,} D(c) = \frac{1 + b}{2} D(c),$$

$$D(c_{,,}) = \frac{1 + b_,}{2} D(c_,) = \frac{1 + b}{2} \cdot \frac{1 + b_,}{2} D(c),$$

$$D(c_{,,,}) = \frac{1 + b_{,,}}{2} D(c_{,,}) = \frac{1 + b}{2} \cdot \frac{1 + b_,}{2} \cdot \frac{1 + b_{,,}}{2} D(c),$$

etc. etc.

On remarquera, d'ailleurs, que tandis que les modules c, $c_,$, $c_{,,}$, etc., décroissent d'une manière rapide, leurs compléments $b, b_,, b_{,,}$, etc., s'approchent de plus en plus de l'unité, qui est leur limite.

§ 82. La formule

$$\text{tang.}\, \varphi_, = \frac{(1 + b)\, \text{tang.}\, \varphi}{1 - b\, \text{tang.}^2 \varphi},$$

est susceptible d'une transformation importante. En y remplaçant $\text{tang.}^2 \varphi$ par sa valeur $\frac{1 - \cos.2\varphi}{1 + \cos.2\varphi}$ et $\frac{1 - b}{1 + b}$ par $c_,$, on obtient

$$\text{tang.}\, \varphi_, = \frac{(1 + \cos.2\varphi)\, \text{tang.}\, \varphi}{c_, + \cos.2\varphi} = \frac{2\cos.^2\varphi . \text{tang.}\, \varphi}{c_, + \cos.2\varphi} = \frac{\sin.2\varphi}{c_, + \cos.2\varphi}.$$

Ce résultat fait voir que si $c_,$ était nul, on aurait $\text{tang.}\, \varphi_, = \text{tang.}\, 2\varphi$, et qu'ainsi :

Dans la série des amplitudes $\varphi, \varphi_,, \varphi_{,,}, \varphi_{,,,}$, etc., *chaque terme tend de plus en plus à être double de celui qui le précède.* Cette duplication est rigoureusement exacte dès le second terme, quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$; car on a alors, $\text{tang.}\, \varphi_, = o$, et, par conséquent, $\varphi_, = \pi$.

§ 83. Les équations (1) donnent, en général,

$$\text{dig.}(c, \varphi) = (1 + c_,)(1 + c_{,,})(1 + c_{,,,}) \ldots\ldots (1 + c_{(n)}) \frac{\text{dig.}(c_{(n)}, \varphi_{(n)})}{2^n};$$

mais lorsque $c_{(n)}$ est devenu très-petit, on a sensiblement

$$\Delta(c_{(n)}, \varphi_{(n)}) = 1, \quad \text{dig.}(c_{(n)}, \varphi_{(n)}) = \varphi_{(n)}.$$

Soit donc x l'angle $\frac{\varphi_{(n)}}{2^n}$, que nous appellerons *l'angle-limite* : il viendra

$$\text{dig.}(c, \varphi) = (1 + c_,)(1 + c_{,,})(1 + c_{,,,}) \ldots\ldots (1 + c_{(n)})x.$$

Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a, d'après la loi de duplication des amplitudes $\varphi, \varphi_{,}, \varphi_{,,}$, etc.,

$$\varphi_{,} = 2.\frac{\pi}{2},\quad \varphi_{,,} = 2\varphi_{,} = 2^2.\frac{\pi}{2},\quad \varphi_{,,,} = 2\varphi_{,,} = 2^3.\frac{\pi}{2},$$

et, en général,

$$\varphi_{(n)} = 2^n.\frac{\pi}{2};$$

d'où $x = \frac{1}{2}\pi$ dans ce cas, et la fonction complète a pour expression

$$D(c) = (1+c_{,})(1+c_{,,})(1+c_{,,,}).\ .\ .\ .\ .\ .\ (1+c_{(n)})\frac{\pi}{2}.$$

Il suit de là que le produit

$$(1+c_{,})(1+c_{,,}).\ .\ .\ .\ .\ .\ (1+c_{(n)}),$$

que nous représenterons par Σ, a pour valeur

$$\Sigma = \frac{2D(c)}{\pi}.$$

Il peut aussi s'exprimer de cette manière

$$\Sigma = \frac{2\sqrt{c_{,}}}{c}.\frac{2\sqrt{c_{,,}}}{c_{,}}.\frac{2\sqrt{c_{,,,}}}{c_{,,}}\ldots\ldots\frac{2\sqrt{c_{(n)}}}{c_{(n-1)}}. = \frac{2^n\sqrt{c_{(n)}}}{c\sqrt{c_{,}c_{,,}c_{,,,}\ldots\ldots c_{(n-1)}}}.$$

On peut encore le transformer, en remarquant que des équations

$$b_{,} = \frac{1-c_{,,}}{1+c_{,,}},\quad b = \frac{1-c_{,}}{1+c_{,}},\quad c_{,} = \frac{2\sqrt{c_{,,}}}{1+c_{,,}},$$

on déduit

$$1+c_{,} = \frac{(1+\sqrt{c_{,,}})^2}{1+c_{,,}},\quad 1-c_{,} = \frac{(1-\sqrt{c_{,,}})^2}{1+c_{,,}},\quad \sqrt{b} = \frac{1-\sqrt{c_{,,}}}{1+\sqrt{c_{,,}}};$$

$$\frac{b_{,}}{\sqrt{b}} = \frac{1-c_{,,}}{1+c_{,,}}.\frac{1+\sqrt{c_{,,}}}{1-\sqrt{c_{,,}}} = \frac{(1+\sqrt{c_{,,}})^2}{1+c_{,,}} = 1+c_{,},$$

et, par conséquent,

$$\Sigma = \sqrt{\frac{b_{,}.\,b_{,,}.\,b_{,,,}\ldots\ldots\ldots b_{(n)}}{b}}.$$

Le digamma exprimé en fonction de l'angle-limite, sera donné par l'équation

$$\text{dig.}\varphi = \Sigma x = \frac{2\text{D}.x}{\pi}.$$

§ 84. Pour faciliter le calcul des modules décroissants, on déterminera l'angle du module θ, par l'équation sin. $\theta = c$; ce qui donne $b = \cos.\theta$, et

$$c_{,} = \frac{1-b}{1+b} = \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Faisant de même $c_{,} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\theta = \sin.\theta_{,}$, ce qui déterminera un nouvel angle $\theta_{,}$, on aura $c_{,,} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\theta_{,}$, et ainsi de suite.

Lorsqu'on sera parvenu à un module $c_{(n)}$ fort petit, on pourra, pour éviter les angles trop petits, calculer le terme suivant $c_{(n+1)}$ par la formule

$$c_{(n+1)} = \frac{1}{4}c^2{}_{(n)} + \frac{1.3}{4.6}c^4{}_{(n)} + \frac{1.3.5}{4.6.8}c^6{}_{(n)} + \text{etc.},$$

dont le premier, ou, tout au plus, les deux premiers termes suffiront. Cette formule se tire de l'expression

$$c_{(n+1)} = \frac{1-b_{(n)}}{1+b_{(n)}} = \frac{(1-b_{(n)})^2}{c^2{}_{(n)}} = \frac{2-c^2{}_{(n)} - 2\sqrt{1-c^2{}_{(n)}}}{c^2{}_{(n)}}.$$

Quant au calcul des angles $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, etc., nous n'avons rien à ajouter à la simplicité de la formule tang. $(\varphi_{,} - \varphi) = b$ tang. φ, qui est très-propre au calcul trigonométrique.

Exemple.

On demande la valeur de dig. (c, φ), lorsque

$$c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sin.75^\circ, \text{ et tang.}\varphi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

Voici d'abord un tableau qui offre le calcul des modules et de leurs compléments :

Valeurs de c *et de* b.	*Leurs logarithmes vulgaires.*
$c = \sin.\ 75^\circ\ 0'\ 0''.00$	9.9849438,
$b = \cos.\ 75\ 0\ 0.00$	9.4129962,
$c_{,} = \left\{\begin{array}{l}\text{tang.}^2 37\ 30\ 0.00\\ \sin.\ 36\ 4\ 16.47\end{array}\right\}$	9.7699610,
$b_{,} = \cos.\ 36\ 4\ 16.47$	9.9075648,
$c_{,,} = \left\{\begin{array}{l}\text{tang.}^2 18\ 2\ 8.235\\ \sin.\ 6\ 5\ 9.38\end{array}\right\}$	9.0253880,
$b_{,,} = \cos.\ 6\ 5\ 9.38$	9.9975452,
$c_{,,,} = \left\{\begin{array}{l}\text{tang.}^2\ 6\ 2\ 34.69\\ \sin.\ 0\ 9\ 42.90\end{array}\right\}$	7.4511672,
$b_{,,,} = \cos.\ 0\ 9\ 42.90$	9.9999982,
$c_{,,,,} = \frac{1}{2}c^2_{,,,} + \text{etc.}$	4.3002761,
$b_{,,,,}$	0.0000000.

Ces logarithmes donneront aisément la valeur de Σ, pour laquelle il suffira d'employer quatre facteurs. On aura ainsi

$$\log.\ \text{vulg.}\ \Sigma = 0.2460560,\ \text{et}\ \Sigma = 1.7622037.$$

De là résulte d'abord $D(c) = \frac{\pi}{2} \cdot \Sigma = 2.7080631$: on trouvera ensuite, par le calcul des amplitudes,

$$\begin{aligned}
\varphi &= 47^\circ\ 3'\ 30''.94,\\
\varphi_{,} &= 62^\circ\ 36'\ 3''.10,\\
\varphi_{,,} &= 119^\circ\ 55'\ 47''.67,\\
\varphi_{,,,} &= 240^\circ\ 0'\ 0''.19,\\
\varphi_{,,,,} &= 480^\circ\ 0'\ 0''.00.
\end{aligned}$$

Les autres valeurs de φ augmenteraient en raison double; d'où il suit que la limite x des angles $\frac{\varphi(n)}{2^n}$ est 30°, ou $\frac{\pi}{6}$: donc on a

$$\text{dig.}\ (c,\ \varphi) = \Sigma \cdot \frac{\pi}{2} = 0.9226877.$$

§ 85. Étant donnée la valeur de l'amplitude φ, on voit qu'il est facile de trouver le digamma avec toute l'exactitude nécessaire. Réciproquement, il peut être utile de déterminer l'amplitude, en supposant connue la valeur du digamma. A cet effet, il faudra calculer les termes de la série $c_{,}$, $c_{,,}$, etc., jusqu'à un terme assez petit pour être négligé. Soit, par exemple, $c_{,,}$ ce terme : puisqu'on a $\varphi_{,,} = 2\varphi_{,,,,}$ (§ 82), l'angle-limite x sera $\frac{1}{16}\varphi_{,,,,}$; et comme on connaît d'ailleurs la valeur de dig. (c, φ), qui est donnée, on connaît x par l'équation $x = \frac{\text{dig.}(c, \varphi)}{\Sigma}$, et, par conséquent, l'amplitude $\varphi_{,,,,}$ égale à $16x$. Cela posé, on calculera successivement les valeurs de $\varphi_{,,,}$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,}$, φ, au moyen des équations

$$\begin{aligned}
\sin.(2\varphi_{,,,} - \varphi_{,,,,}) &= c_{,,,,} \sin.\varphi_{,,,,}, \\
\sin.(2\varphi_{,,} - \varphi_{,,,}) &= c_{,,,} \sin.\varphi_{,,,}, \\
\sin.(2\varphi_{,} - \varphi_{,,}) &= c_{,,} \sin.\varphi_{,,}, \\
\sin.(2\varphi - \varphi_{,}) &= c_{,} \sin.\varphi_{,},
\end{aligned}$$

et on aura l'amplitude cherchée φ.

§ 86. La méthode que nous venons d'exposer est en général très-expéditive. Elle exigera seulement qu'on calcule quelques termes de plus, tant dans la suite des modules que dans celle des amplitudes, lorsque c sera extrêmement près de l'unité. Mais on peut s'assurer que ce nombre de termes ne sera jamais bien considérable : car, dans l'hypothèse où l'on devrait continuer la suite c, $c_{,}$, $c_{,,}$, etc., jusqu'au dixième terme, pour que ce terme fût d'une unité décimale du dixième ordre, il faudrait que la valeur primitive de b fût plus petite que 10^{-21}, et, par conséquent, que celle de $1 - c$ fût plus petite que 10^{-42}.

La remarque précédente, qui est due à Legendre, rend l'universalité de la méthode incontestable. Cependant, lorsque $1 - c$ est extrêmement petit, on peut profiter de cette circonstance pour simplifier les calculs, et procéder d'une autre manière aux approximations.

Dans le cas dont il s'agit, la quantité b est très-petite; et comme on a

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\varphi}} = \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi\sqrt{1 + b^2 \text{tang.}^2\varphi}},$$

si l'amplitude φ est telle, que tang. φ soit beaucoup plus petite que $\frac{1}{b}$, on pourra négliger le terme b^2 tang.$^2\varphi$ sous le radical. On aura alors, avec une exactitude suffisante,

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi} = \log.\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Si tang. φ est comparable à $\frac{1}{b}$, il faudra transformer la formule proposée dig. (c, φ) en une autre dig. $(c^{(\mu)}, \varphi^{(\mu)})$ où $b^{(\mu)}$ soit beaucoup plus petit, afin que, dans la transformée, $b^{(\mu)2}$ tang.$^2\varphi^{(\mu)}$ devienne une quantité négligeable. C'est ce qu'il est facile d'obtenir, en calculant jusqu'au terme convenable, les modules croissants c', c'', etc., et les amplitudes décroissantes φ', φ'', etc., par les formules du § 79. Soit, à cet effet, $b = \sin.\lambda$, on aura $b' = \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\lambda$; soit de nouveau $b' = \sin.\lambda'$, on aura $b'' = \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\lambda'$, et ainsi de suite, jusqu'au terme $b^{(\mu)}$, qui ait le degré de petitesse exigé. On calculera ensuite les amplitudes φ', φ'', etc., jusqu'au terme $\varphi^{(\mu)}$, correspondant à $b^{(\mu)}$: faisant alors $c^{(\mu)} = 1$, et

$$\Sigma' = \frac{2}{1+c}\cdot\frac{2}{1+c'}\cdots\frac{2}{1+c^{(\mu-1)}} = c^{(\mu)}\sqrt{\frac{c'c''c'''\ldots c^{(\mu-1)}}{c}} = \frac{1}{c}\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-1)}},$$

on aura

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \text{dig.}(c, \varphi) = \Sigma' \log.\text{tang.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^{(\mu)}).$$

§ 87. Il ne faut pas perdre de vue, que cette approximation est fondée sur ce que, dans la valeur de dig. $(c^{(\mu)}, \varphi^{(\mu)})$, on a négligé le terme $[b^{(\mu)}\text{ tang. }\varphi^{(\mu)}]^2$; ce qui ne serait plus permis, si $\varphi^{(\mu)}$ était assez près de 90°, pour que $b^{(\mu)}$ tang. $\varphi^{(\mu)}$ cessât d'être très-petit. Supposons (ce qui est le cas le plus défavorable) qu'on ait $\varphi^{(\mu)} = 90^\circ$: alors, il faudra prolonger les suites d'un terme de plus, ou jusqu'au $(\mu+1)^{me}$ terme; ce qui donnera, à cause de tang. $(\varphi^{(\mu)} - \varphi^{(\mu+1)}) = b^{(\mu+1)}$ tang. $\varphi^{(\mu+1)}$,

$$\text{tang. }\varphi^{(\mu+1)} = \frac{1}{\sqrt{b^{(\mu+1)}}}, \quad b^{(\mu+1)2}\text{ tang.}^2\varphi^{(\mu+1)} = b^{(\mu+1)}.$$

Or, l'on a

$$c^{(\mu)} = \sqrt{1 - b^{(\mu)2}}, \quad b^{(\mu+1)} = \frac{1 - c^{(\mu)}}{1 + c^{(\mu)}};$$

d'où, en négligeant les puissances de $b^{(\mu)}$ supérieures à la seconde,

$$c^{(\mu)} = 1 - \tfrac{1}{2} b^{(\mu)2}, \quad b^{(\mu+1)} = \frac{b^{(\mu)2}}{4 - b^{(\mu)2}}.$$

Il suit de cette dernière équation, que $b^{(\mu+1)}$ et $b^{(\mu)2}$ deviennent négligeables en même temps, et qu'ainsi le radical

$$\Delta^{(\mu+1)} = \cos.\varphi^{(\mu+1)} \sqrt{1 + b^{(\mu+1)2} \tang.^2 \varphi^{(\mu+1)}} = \cos.\varphi^{(\mu+1)} \sqrt{1 + b^{(\mu+1)}}$$

se réduit à $\cos.\varphi^{(\mu+1)}$. La formule précédente sera donc toujours applicable, et donnera la valeur de la fonction, aux termes près de l'ordre $\Sigma' b^{(\mu)2}$, si l'on a soin de calculer un terme de plus, lorsque $\left[b^{(\mu)} \tang.\varphi^{(\mu)}\right]^2$ n'est pas négligeable. Cette observation ne concerne pas les digamma seulement : il faudra y avoir égard chaque fois qu'il s'agira d'appliquer la méthode des modules croissants au calcul des autres fonctions elliptiques.

§ 88. Proposons-nous de trouver la valeur de la fonction complète aux termes près de l'ordre b^4 : pour cela, nous ferons $\varphi = 90°$, et nous passerons de la proposée dig. $(c, \frac{\pi}{2})$ à la transformée dig. (c', φ'). L'équation tang. $(\varphi - \varphi') = b'$ tang. φ', devenant cot. $\varphi' = b'$ tang. φ', on aura

$$\tang.\varphi' = \frac{1}{\sqrt{b'}}, \quad b'^2 \tang.^2\varphi' = b',$$

$$\sin.\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1 + b'}} = 1 - \frac{1}{2} b' + \frac{1.3}{2.4} b'^2 - \text{etc.}$$

Or, de la formule (3) du § 69, en négligeant les termes en $b'^4 \tang.^4\varphi'$, qui ne sont que de l'ordre b'^2, et en observant que

$$\log.\tang.(45° + \tfrac{1}{2}\varphi') = \frac{1}{2} \log.\left(\frac{1 + \sin.\varphi'}{1 - \sin.\varphi'}\right),$$

on déduit

$$\text{dig.}(c', \varphi') = \frac{1}{2} \log.\left(\frac{1 + \sin.\varphi'}{1 - \sin.\varphi'}\right)\left(1 + \frac{1}{4} b'^2\right) - \frac{b'^2 \tang.^2\varphi'}{4 \sin.\varphi'} :$$

substituant à $\sin.\varphi'$ et à $b'^2 \tang.^2\varphi'$ leurs valeurs, et négligeant

les puissances de b' supérieures à la première, il vient

$$\text{dig.}\,(c',\ \varphi') = \frac{1}{2}\log.\left(\frac{4-b'}{b'}\right) - \frac{b'}{4}.$$

De plus, on a en général

$$\text{dig.}\,(c,\ \varphi) = \frac{2}{1+c}\,\text{dig.}\,(c',\ \varphi'):$$

par conséquent, puisque $\varphi = 90°$,

$$D(c) = \frac{1}{1+c}\log.\left(\frac{4-b'}{b'}\right) - \frac{b'}{2(1+c)}.$$

Remarquons que $c = \sqrt{1-b^2}$, $b' = \frac{1-c}{1+c}$; d'où, en négligeant les puissances de b supérieures à la seconde,

$$c = 1 - \tfrac{1}{2}b^2,\quad \frac{1}{1+c} = \frac{2}{4-b^2},\quad b' = \frac{b^2}{4-b^2},$$

et finalement

$$D(c) = \frac{2}{4-b^2}\log.\left(\frac{16-5b^2}{b^2}\right) - \frac{b^2}{(4-b^2)^2}.$$

Lorsque b est assez petit pour qu'on néglige b^2 vis-à-vis de 4, $5b^2$ vis-à-vis de 16 et $\frac{b^2}{4^2}$ vis-à-vis de log. $\frac{4}{b}$, cette formule devient simplement, aux termes près de l'ordre b^2,

$$D(c) = \log.\left(\frac{4}{b}\right);$$

résultat fort remarquable, déjà signalé par Legendre; mais nous ignorons comment il y est parvenu (*voyez la note* V).

Si le module c n'était pas assez voisin de l'unité pour que la différence $1-c$ fût une quantité négligeable, on tirerait de la suite d'équations

$$D(c) = \frac{1}{1+c}D(c') = \frac{c'}{2\sqrt{c}}D(c'),$$

$$D(c') = \frac{c''}{2\sqrt{c'}}D(c''),$$

$$D(c'') = \frac{c'''}{2\sqrt{c''}}D(c'''),$$

etc.,

la valeur

$$D(c) = \frac{c'}{2\sqrt{c}} \cdot \frac{c''}{2\sqrt{c'}} \cdot \frac{c'''}{2\sqrt{c''}} D(c''') = \frac{c'''\sqrt{cc'c''}}{c} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot D(c''').$$

Continuant cette suite jusqu'au μ^{me} terme inclusivement, et observant que, lorsque $c^{(\mu)}$ est assez près de l'unité pour que $1 - c^{(\mu)}$ puisse être négligé sans erreur sensible, on a $D(c^{(\mu)}) = \log. \frac{4}{b^{(\mu)}}$, la valeur de $D(c)$, devient

$$D(c) = \Sigma' \cdot \frac{1}{2^\mu} \log. \frac{4}{b^{(\mu)}}.$$

On voit maintenant qu'il y a deux méthodes pour déterminer la valeur approchée d'un digamma. Il est à remarquer que cette fonction peut toujours s'exprimer à volonté par un arc de cercle ou par un logarithme; mais on voit qu'elle se rapproche davantage des arcs de cercle, si l'on a $c^2 < \frac{1}{2}$, et qu'elle a plus d'affinité avec les logarithmes, quand on a $c^2 > \frac{1}{2}$.

§ 89. A la série croissante des modules

0) . . . . . $c_{,,,}, c_{,,}, c_{,}, c, c', c'', c'''$ . . . . . (1

répond la série décroissante des compléments

1) . . . . . $b_{,,,}, b_{,,}, b_{,}, b, b', b'', b'''$ . . . . . (0,

dans laquelle chaque terme se déduit du *suivant*, d'après la même loi que le terme correspondant dans la série des modules primitifs, se déduit du terme *précédent*. C'est-à-dire que, tandis que

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1 + c},$$

on a, au contraire,

$$b = \frac{2\sqrt{b'}}{1 + b'}.$$

Cette propriété se conclut sans peine de la relation $c = \frac{1 - b'}{1 + b'}$ du § 80. Il s'ensuit que

$$D(c) = (1 + c_{,})D(c_{,}),$$

étant l'équation transcendante, qui lie le module c au module im-

médiatement inférieur $c_{,}$, on aura, pour la même raison, entre le module $b_{,}$ et le module immédiatement inférieur en grandeur b, l'équation

$$D(b_{,}) = (1 + b)D(b) :$$

il vient, par conséquent,

$$\frac{D(c)}{D(b)} = (1 + c_{,})(1 + b)\frac{D(c_{,})}{D(b_{,})};$$

et, à cause de $b = \frac{1 - c_{,}}{1 + c_{,}}$,

$$\frac{D(c)}{D(b)} = 2\frac{D(c_{,})}{D(b_{,})};$$

ce qui établit une relation bien remarquable entre les fonctions complètes des modules b, c, $b_{,}$ et $c_{,}$.

CHAPITRE X.

Transformation du module dans les epsilon.

§ 90. Considérons les deux fonctions

$$\text{eps.}(c, \varphi) = \int d\varphi\, \Delta(c, \varphi), \quad \text{eps.}(c', \varphi') = \int d\varphi' \Delta(c', \varphi') :$$

si l'on substitue pour $d\varphi'$ et $\Delta(c', \varphi')$ les valeurs trouvées au § 78, qui sont

$$d\varphi' = \frac{d\varphi}{\Delta} \cdot \frac{c \cos. \varphi + \Delta}{2}, \quad \Delta(c', \varphi') = \frac{c \cos. \varphi + \Delta}{1 + c},$$

on aura

$$(2 + 2c) \text{ eps.}(c', \varphi') = \int \frac{d\varphi}{\Delta} (c \cos. \varphi + \Delta)^2.$$

Après avoir substitué, dans le second membre, la valeur

$$(c \cos. \varphi + \Delta)^2 = 2\Delta^2 + 2c\Delta \cos. \varphi - b^2,$$

et effectué l'intégration, il viendra

$$(1 + c) \text{ eps.}(c', \varphi') = \text{eps.}(c, \varphi) - \tfrac{1}{2} b^2 \text{ dig.}(c, \varphi) + c \sin. \varphi,$$

et de là résulte la formule

$$b^2 \text{ dig.}(c, \varphi) = 2 \text{ eps.}(c, \varphi) - 2(1 + c) \text{ eps.}(c', \varphi') + 2c \sin. \varphi;$$

par où l'on voit que *la fonction de première espèce dig.*(c, φ), *peut s'exprimer par les deux arcs d'ellipse eps.*(c, φ), *eps.*(c', φ') (voyez la note VI).

§ 91. Considérons une suite infinie de fonctions

$$\text{eps.}\,(c, \varphi), \quad \text{eps.}\,(c', \varphi'), \quad \text{eps.}\,(c'', \varphi''), \text{etc.},$$

formées d'après la même loi que les fonctions

$$\text{dig.}\,(c, \varphi), \quad \text{dig.}\,(c', \varphi'), \quad \text{dig.}\,(c'', \varphi''), \text{etc.}:$$

on aura d'abord

$$\tfrac{1}{2}b^2\ \text{dig.}\,(c, \varphi) = \text{eps.}\,(c, \varphi) - (1+c)\,\text{eps.}\,(c', \varphi') + c\ \sin.\varphi,$$
$$\tfrac{1}{2}b'^2\,\text{dig.}\,(c', \varphi') = \text{eps.}\,(c', \varphi') - (1+c')\,\text{eps.}\,(c'', \varphi'') + c'\sin.\varphi';$$

mais on a de plus

$$\text{dig.}\,(c', \varphi') = \frac{1+c}{2}\,\text{dig.}\,(c, \varphi):$$

éliminant donc les digamma de ces trois équations, on aura entre les epsilon consécutifs eps. (c, φ), eps. (c', φ'), eps. (c'', φ''), la relation

$$o = \tfrac{1}{2}b'(1+b')\,\text{eps.}\,(c,\varphi) - (2+b')\,\text{eps.}\,(c', \varphi') + 2(1+c')\,\text{eps.}\,(c'', \varphi'')$$
$$+ \tfrac{1}{2}b'(1-b')\sin.\varphi - 2c'\sin.\varphi'.$$

La même équation peut être appliquée à trois epsilon consécutifs, pris, non-seulement dans la suite infinie eps.(c, φ), eps.(c', φ'), eps. (c'', φ''), etc., mais, en général, dans la suite doublement infinie

$$\ldots\ \text{eps.}\,(c'', \varphi''), \text{eps.}\,(c', \varphi'), \text{eps.}\,(c, \varphi), \text{eps.}\,(c_{,}, \varphi_{,}), \text{eps.}\,(c_{,,}, \varphi_{,,}), \ldots$$

dont les extrêmes sont, d'une part, l'arc d'une ellipse qui a pour excentricité 1, et qui se réduit à son grand axe; d'autre part, l'arc d'une ellipse qui a pour excentricité 0, et qui se confond avec le cercle : il en résulte donc, que par la rectification de deux arcs d'ellipse de cette suite, on obtient la rectification de tous les autres.

La formule générale se simplifie lorsqu'il s'agit de la rectification du périmètre entier de ces ellipses. En effet, si l'on fait $\varphi'' = \tfrac{1}{2}\pi$, on aura $\varphi' = \pi$ et $\varphi = 2\pi$ (§ 82) : il viendra donc

$$\text{eps.}\,(c'', \varphi'') = \text{E}(c''), \text{eps.}\,(c', \varphi') = 2\text{E}(c'), \text{eps.}\,(c, \varphi) = 4\text{E}(c),$$

et l'on aura entre les trois quarts d'ellipse ci-dessus, la relation

$$b'(1+b')\,\text{E}(c) - (2+b')\,\text{E}(c') + (1+c')\,\text{E}(c'') = o.$$

On aura une équation semblable entre trois termes consécutifs quelconques, pris dans la série générale des ellipses. Ainsi, la circonférence d'une ellipse proposée, pourra toujours se déterminer exactement par les ciconférences de deux ellipses, aussi peu différentes de la ligne droite qu'on voudra, en prolongeant les séries dans un sens; et aussi peu différentes du cercle qu'on voudra, en prolongeant les séries dans l'autre sens. Dans ce dernier cas, il faudrait faire usage des équations successives

$$(1+c_{,})\,E(c) - (2+b_{,})\,E(c_{,}) + b_{,}\,(1+b_{,})\,E(c_{,,}) = o,$$
$$(1+c_{,,})\,E(c_{,}) - (2+b_{,,})\,E(c_{,,}) + b_{,,}(1+b_{,,})\,E(c_{,,,}) = o,$$

etc.,

qu'on prolongerait aussi loin qu'on aurait cru devoir prolonger la suite des modules $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, etc.

§ 92. La détermination exacte et absolue dont on vient de parler, peut être regardée comme un théorème fort remarquable dans la théorie des transcendantes; mais, si l'on a seulement pour but d'obtenir des approximations, on y parviendra plus facilement par les méthodes que nous allons exposer.

φ et $\varphi_{,}$, c et $c_{,}$, étant deux amplitudes et deux modules liés respectivement par les équations

$$\sin.\,(2\varphi - \varphi_{,}) = c_{,}\sin.\,\varphi_{,},$$
$$c = \frac{2\sqrt{c_{,}}}{1+c_{,}},$$

si l'on remplace c' et φ' par c et φ, et, par conséquent, c et φ par $c_{,}$ et $\varphi_{,}$ dans les équations du § 78, on aura, en désignant en général par $\Delta_{(\mu)}$ le radical $\sqrt{1 - c^2_{(\mu)}\sin.^2\varphi_{(\mu)}}$,

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1+c_{,}}{2}\cdot\frac{d\varphi_{,}}{\Delta_{,}},$$

et

$$\sin.^2\varphi = \tfrac{1}{2}(1 + c_{,}\sin.^2\varphi_{,} - \Delta_{,}\cos.\,\varphi_{,}).$$

Cela posé, afin d'obtenir plus de symétrie dans les résultats, nous considèrerons une fonction G, composée de la première et de la se-

conde espèce, telle que

$$G = \int (A + B \sin.^2\varphi) \frac{d\varphi}{\Delta} :$$

si l'on y substitue les valeurs précédentes de $\sin.^2\varphi$ et de $\frac{d\varphi}{\Delta}$, on aura la transformée

$$G = \frac{1 + c_,}{2} (G_, - \tfrac{1}{2} B \sin.\varphi_,),$$

où l'on suppose

$$G_, = \int (A_, + B_, \sin.^2\varphi_,) \frac{d\varphi_,}{\Delta_,}, \quad A_, = A + \frac{1}{2} B, \quad B_, = \frac{1}{2} Bc_,.$$

On trouvera ensuite, par de semblables transformations,

$$G_, = \frac{1 + c_{,,}}{2}\left(G_{,,} - \frac{1}{2} B_, \sin.\varphi_{,,}\right), \quad G_{,,} = \frac{1 + c_{,,,}}{2}\left(G_{,,,} - \frac{1}{2} B_{,,} \sin.\varphi_{,,,}\right), \text{etc.} :$$

ainsi, l'intégrale G se ramène successivement aux intégrales semblables $G_,$, $G_{,,}$, $G_{,,,}$, etc., et une seule de ces intégrales suffit pour déterminer toutes les autres.

Supposons que cette suite soit prolongée jusqu'à un terme $G_{(\mu)}$, assez éloigné pour que le module correspondant $c_{(\mu)}$ soit de l'ordre des quantités qu'on veut négliger : alors, on aura $\Delta_{(\mu)} = 1$, et la valeur de $G_{(\mu)}$ se réduit d'abord à

$$G_{(\mu)} = \int (A_{(\mu)} + B_{(\mu)} \sin.^2\varphi_{(\mu)}) d\varphi_{(\mu)}.$$

Observons ensuite qu'on a

$$B_, = \frac{1}{2} Bc_,, \quad B_{,,} = \frac{1}{2} B_, c_{,,} = \frac{1}{4} Bc_, c_{,,}, \quad B_{,,,} = \frac{1}{8} Bc_, c_{,,} c_{,,,}, \text{ etc.} :$$

donc, la suite $B_,$, $B_{,,}$, $B_{,,,}$, décroit plus rapidement que la suite $c_,$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, etc. : donc, on peut faire, après un certain nombre de termes, $B_{(\mu)} = o$, ce qui donnera $G_{(\mu)} = A_{(\mu)} \varphi_{(\mu)}$; d'où il suit que x étant la limite des angles φ, $\frac{1}{2}\varphi'$, $\frac{1}{4}\varphi_{,,}$, etc. (§ 83), on aura

$$G_{(\mu)} = A_{(\mu)} 2^\mu x.$$

A l'égard de $A_{(\mu)}$, puisqu'on a

$$A_{,} = A + \frac{1}{2}B, \quad A_{,,} = A_{,} + \frac{1}{2}B_{,}, \text{ etc.},$$

l'expression générale de $A_{(\mu)}$ sera

$$A_{(\mu)} = A + \frac{1}{2}B\left(1 + \frac{c_{,}}{2} + \frac{c_{,}c_{,,}}{4} + \frac{c_{,}c_{,,}c_{,,,}}{8} + \text{etc.}\right).$$

Maintenant, si l'on porte dans G la valeur de $G_{,}$ en $G_{,,}$, on aura

$$G = \frac{1+c_{,}}{2}\cdot\frac{1+c_{,,}}{2}\cdot G_{,,} - \frac{1+c_{,}}{2}\cdot\frac{1}{2}B.\sin.\varphi_{,} - \frac{1+c_{,}}{2}\cdot\frac{1+c_{,,}}{2}\cdot\frac{1}{2}B_{,}.\sin.\varphi_{,,};$$

par où il est aisé de voir, que la valeur de cette fonction déterminée par celle de $G_{(\mu)}$, est composée de deux parties: l'une $\Sigma.A_{(\mu)}x$, Σ désignant le produit $(1+c_{,})(1+c_{,,})(1+c_{,,,})$ .... (§ 83), l'autre qui peut se mettre sous la forme

$$-\frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c_{,}}}{2}\sin.\varphi_{,} + \frac{\sqrt{c_{,}c_{,,}}}{4}\sin.\varphi_{,,} + \text{etc.}\right),$$

à cause des équations

$$B_{,} = \frac{1}{2}Bc_{,}, \quad B_{,,} = \frac{1}{4}Bc_{,}c_{,,}, \quad B_{,,,} = \frac{1}{8}Bc_{,}c_{,,}c_{,,,}, \text{ etc.};$$

$$1 + c_{,} = \frac{2\sqrt{c_{,}}}{c}, \quad 1 + c_{,,} = \frac{2\sqrt{c_{,,}}}{c_{,}}, \quad 1 + c_{,,,} = \frac{2\sqrt{c_{,,,}}}{c_{,,}}, \text{ etc.}:$$

donc la valeur totale de G, sera

$$(a).G = \Sigma A_{(\mu)}x - \frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c_{,}}}{2}\sin.\varphi_{,} + \frac{\sqrt{c_{,}c_{,,}}}{4}\sin.\varphi_{,,} + \frac{\sqrt{c_{,}c_{,,}c_{,,,}}}{8}\sin.\varphi_{,,,} + \text{etc.}\right).$$

§ 93. On peut donner à la partie algébrique de cette formule, une autre forme qui sera plus facile à calculer dans certains cas. Pour cela, soit

$$\varphi_{,} - \varphi = \omega_{;} \quad \varphi_{,,} - \varphi_{,} = \omega_{,}, \quad \varphi_{,,,} - \varphi_{,,} = \omega_{,,}, \text{ etc.}:$$

on aura la suite d'équations

$$\text{tang.}\omega = b\,\text{tang.}\varphi,$$
$$\text{tang.}\omega_{,} = b_{,}\text{tang.}\varphi_{,} = b_{,}\text{tang.}(\varphi + \omega),$$
$$\text{tang.}\omega_{,,} = b_{,,}\text{tang.}\varphi_{,,} = b_{,,}\text{tang.}(\varphi_{,} + \omega_{,}),$$
$$\text{etc.},$$

par lesquelles on calculera successivement les angles ω, $\omega_{,}$, $\omega_{,,}$, etc. Or, la valeur $\varphi_{,} = \varphi + \omega$ donne

$$\sin.\varphi_{,} = \sin.\varphi\cos.\omega + \cos.\varphi\sin\omega = (1 + b)\sin.\varphi\cos.\omega$$
$$= \frac{2}{1 + c_{,}}\sin.\varphi\cos.\omega = \frac{c}{\sqrt{c_{,}}}\sin.\varphi\cos.\omega:$$

on aura de même

$$\sin.\varphi_{,,} = \frac{c_{,}}{\sqrt{c_{,,}}}\sin.\varphi_{,}\cos.\omega_{,} = \frac{c\sqrt{c_{,}}}{\sqrt{c_{,,}}}\sin.\varphi\cos.\omega\cos.\omega_{,},$$

$$\sin.\varphi_{,,,} = \frac{c\sqrt{c_{,}c_{,,}}}{\sqrt{c_{,,,}}}\sin.\varphi\cos.\omega\cos.\omega_{,}\cos.\omega_{,,},$$

etc. :

donc la valeur de G peut être exprimée par cette formule, dont la convergence est manifeste,

$$G = \Sigma A_{(\mu)}x - \frac{1}{2}B\sin.\varphi\cos.\omega\left(1 + \frac{1}{2}c_{,}\cos.\omega_{,} + \frac{1}{4}c_{,}c_{,,}\cos.\omega_{,}\cos.\omega_{,,} + \text{etc.}\right).$$

Dans le cas où $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, la partie algébrique disparaît, et on a, pour valeur de la fonction complète,

$$(a') \ldots\ldots\ldots\ldots G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Sigma A_{(\mu)}\frac{1}{2}\pi.$$

§ 94. Les suites qui composent la valeur de G, seront fort convergentes, si l'on a $c^2 < \frac{1}{2}$, et alors trois termes suffiront pour donner la valeur de G, approchée jusqu'à sept décimales environ. Les mêmes formules pourront être employées avec avantage, quand même le module c serait beaucoup plus près de l'unité : car si l'on avait,

par exemple, $c = 0.985$, il en résulterait à peu près $c_{,} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; d'où l'on voit qu'il n'y aurait qu'un terme de plus à calculer, c'est-à-dire quatre termes en tout, pour avoir la valeur de G avec le même degré d'approximation. Mais si c est beaucoup plus près de l'unité, ou si, ayant $c^2 > \tfrac{1}{2}$, on veut obtenir un même degré d'approximation avec le moindre nombre possible de transformées, alors il conviendra de se servir d'une seconde méthode que nous avons appliquée également, en pareil cas, aux fonctions de la première espèce (§ 86).

Cette méthode consiste à prolonger dans un ordre inverse la série des transformées. Ainsi, l'équation entre G et $G_{,}$ qui donne

$$G_{,} = \frac{2}{1 + c_{,}} G + \tfrac{1}{2} B \sin. \varphi_{,},$$

s'applique semblablement aux deux fonctions G et G', et on en déduit

$$G = \frac{2}{1 + c} G' + \tfrac{1}{2} B' \sin. \varphi;$$

équation où l'on doit supposer

$$G' = \int (A' + B' \sin.^2 \varphi') \frac{d\varphi'}{\Delta'}, \quad A' = A - \tfrac{1}{2} B', \quad B' = \frac{2B}{c}.$$

On aura pareillement, par des transformées ultérieures,

$$G' = \frac{2}{1 + c'} G'' + \tfrac{1}{2} B'' \sin. \varphi'', \quad G'' = \frac{2}{1 + c''} G''' + \tfrac{1}{2} B''' \sin. \varphi''', \text{etc.};$$

mais, lorsque la suite G', G'', etc., sera prolongée jusqu'à un terme suffisamment éloigné $G^{(\mu)}$, on pourra faire $c^{(\mu)} = 1$, $\Delta^{(\mu)} = \cos. \varphi^{(\mu)}$, et alors on aura

$$G^{(\mu)} = \int (A^{(\mu)} + B^{(\mu)} \sin.^2 \varphi^{(\mu)}) \frac{d\varphi^{(\mu)}}{\cos. \varphi^{(\mu)}};$$

ce qui donne, en intégrant,

$$G^{(\mu)} = (A^{(\mu)} + B^{(\mu)}) \log. \tang. (45^\circ + \tfrac{1}{2} \varphi^{(\mu)}) - B^{(\mu)} \sin. \varphi^{(\mu)}.$$

On obtiendra la valeur de l'angle $\varphi^{(\mu)}$, en calculant, jusqu'au terme convenable, les modules croissants c', c'', c''', etc., leurs compléments

b', b'', b''', etc., et les amplitudes décroissantes φ', φ'', φ''', etc., qui seront données par les formules

$$\sin.(2\varphi'-\varphi)=c\sin.\varphi,\ \sin.(2\varphi''-\varphi')=c'\sin.\varphi',$$
$$\sin.(2\varphi'''-\varphi'')=c''\sin.\varphi'',\ \text{etc.}$$

Les compléments décroissants b', b'', etc., se calculeront avec facilité, en suivant une marche analogue à celle que nous avons indiquée au § 84. Posant, par exemple, $b=\sin.\lambda$, on aura $b'=\text{tang.}^2\frac{1}{2}\lambda$: posant de nouveau $b'=\text{tang.}^2\frac{1}{2}\lambda=\sin.\lambda'$, on aura $b''=\text{tang.}^2\frac{1}{2}\lambda'$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le dernier terme de ces compléments $b^{(\mu)}$, soit assez petit pour que son carré soit négligeable. Alors, on pourra prendre $c^{(\mu)}=1$, et calculant un pareil nombre de termes de la série des amplitudes φ', φ'', φ''', etc., on aura le dernier terme $\varphi^{(\mu)}$, qu'il faudra porter dans la valeur de $G^{(\mu)}$. Faisant donc les substitutions nécessaires pour avoir la valeur de G en $G^{(\mu)}$, et observant qu'on a

$$\frac{2}{1+c}=\frac{c'}{\sqrt{c}},\quad \frac{2}{1+c'}=\frac{c''}{\sqrt{c'}},\ \text{etc.},$$

on trouvera la formule qui suit, dans laquelle on a dénoté par Σ' le même produit qu'au § 86,

$$G=\Sigma'(A^{(\mu)}+B^{(\mu)})\log.\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\varphi^{(\mu)})-\frac{B}{c}\cdot\frac{2^\mu\sin.\varphi^{(\mu)}}{c\Sigma'}$$
$$+\frac{B}{c}\left(\sin.\varphi+\frac{2}{\sqrt{c}}\sin.\varphi'+\frac{4}{\sqrt{cc'}}\sin.\varphi''\ldots+\frac{2^{\mu-1}\sin.\varphi^{(\mu-1)}}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-2)}}}\right).$$

Quant à la valeur de $A^{(\mu)}+B^{(\mu)}$, si on l'appelle $L^{(\mu)}$, on aura

$$L^{(\mu)}=A+\frac{2^\mu B}{cc'c''\ldots c^{(\mu-1)}}-\left(\frac{B}{c}+\frac{2B}{cc'}+\frac{4B}{cc'c''}\ldots+\frac{2^{\mu-1}B}{cc'c''\ldots c^{(\mu-1)}}\right),$$

comme il est aisé de le conclure des équations

$$B=\tfrac{1}{2}B'c,\ B'=\tfrac{1}{2}B''c',\ B''=\tfrac{1}{2}B'''c'',\ \text{etc};$$
$$A=A'+\tfrac{1}{2}B',\ A'=A''+\tfrac{1}{2}B'',\ A''=A'''+\tfrac{1}{2}B''',\ \text{etc.}$$

§ 95. La série qui précède est divergente; mais on peut lui donner une autre forme, en regardant $L^{(\mu)}$ comme composé de $L=A+B$,

et de la somme des différences successives $L'-L$, $L''-L'$, etc. On obtient ainsi

$$L^{(\mu)} = A + \frac{B}{c} + \frac{2B}{cc'}(1-c') + \frac{4B}{cc'c''}(1-c'') + \text{etc.};$$

série que les relations

$$b\sqrt{b'} = 1-c,\ b'\sqrt{b''} = 1-c',\ \text{etc.},$$
$$c' = \frac{2\sqrt{b'c}}{b},\ c'' = \frac{2\sqrt{b''c'}}{b'},\ \text{etc.},$$

permettent de remplacer par la suivante

$$L^{(\mu)} = A + B + \frac{Bb}{c}\left(\sqrt{b'} + \sqrt{\frac{b'b''}{c}} + \sqrt{\frac{b'b''b'''}{cc'}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{b'b''\ldots b^{(\mu)}}{cc'c''\ldots c^{(\mu-2)}}}\right),$$

dont la convergence est manifeste.

On peut également rendre convergente la suite des quantités algébriques comprises dans la valeur de G. Pour cela, remarquons que

$$\frac{2^\mu \sin.\varphi^{(\mu)}}{c\Sigma'} = \frac{2^\mu c^{(\mu)} \sin.\varphi^{(\mu)}}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-1)}}},$$

et faisons, pour abréger,

$$(1)\left\{\begin{aligned} \Psi(\mu) &= \frac{2^\mu c^{(\mu)} \sin.\varphi^{(\mu)}}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-1)}}} - \sin.\varphi \\ &- \frac{2}{\sqrt{c}}\sin.\varphi' - \frac{2^2}{\sqrt{cc'}}\sin.\varphi'' \ldots - \frac{2^{\mu-1}\sin.\varphi^{(\mu-1)}}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-2)}}}: \end{aligned}\right.$$

on déduit de là, en changeant μ en $\mu-1$,

$$\Psi(\mu)-\Psi(\mu-1) = \frac{2^\mu c^{(\mu)} \sin.\varphi^{(\mu)}}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-1)}}} - \frac{2^{\mu-1} c^{(\mu-1)} \sin.\varphi^{(\mu-1)}}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-2)}}} - \frac{2^{\mu-1}\sin.\varphi^{(\mu-1)}}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-2)}}}$$
$$= \frac{2^\mu}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-1)}}}\left[c^{(\mu)}\sin.\varphi^{(\mu)} - \frac{c^{(\mu-1)}}{c^{(\mu)}}\sin.\varphi^{(\mu-1)}\right],$$

et, par suite,

$$(2)\ldots\begin{cases}\Psi(2)-\Psi(1)=\dfrac{4}{\sqrt{cc'}}\left(c''\sin.\varphi''-\dfrac{c'}{c''}\sin.\varphi'\right),\\[2ex]\Psi(1)-\Psi(0)=\dfrac{2}{\sqrt{c}}\left(c'\sin.\varphi'-\dfrac{c}{c'}\sin.\varphi\right);\end{cases}$$

mais la formule (1) donne

$$(3)\ \ldots\ \Psi(2)=\frac{4c''\sin.\varphi''}{\sqrt{cc'}}-\sin.\varphi-\frac{2\sin.\varphi'}{\sqrt{c}}:$$

éliminant $\Psi(1)$ et $\Psi(2)$ entre les équations (2) et (3), on trouve

$$\Psi(0)=\left(\frac{2c}{c'\sqrt{c}}-1\right)\sin.\varphi+\left(\frac{4c'}{c''\sqrt{cc'}}-\frac{2c'}{\sqrt{c}}-\frac{2}{\sqrt{c}}\right)\sin.\varphi';$$

équation qui se réduit à

$$\Psi(0)=c\sin.\varphi,$$

en vertu des relations

$$c'=\frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad c''=\frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}.$$

Au moyen des substitutions successives de $\Psi(0)$ dans $\Psi(1)$, puis de $\Psi(1)$ dans $\Psi(2)$ et ainsi de suite, on aura, pour exprimer $\Psi(\mu)$, cette série convergente

$$\begin{aligned}\Psi(\mu)=c\sin.\varphi&+\frac{2}{\sqrt{c}}\left(c'\sin.\varphi'-\frac{c}{c'}\sin.\varphi\right)\\&+\frac{4}{\sqrt{cc'}}\left(c''\sin.\varphi''-\frac{c'}{c''}\sin.\varphi'\right)\\&+\frac{8}{\sqrt{cc'c''}}\left(c'''\sin.\varphi'''-\frac{c''}{c'''}\sin.\varphi''\right)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{2^{\mu}}{\sqrt{cc'\ldots.c^{(\mu-1)}}}\left(c^{(\mu)}\sin.\varphi^{(\mu)}-\frac{c^{(\mu-1)}}{c^{(\mu)}}\sin.\varphi^{(\mu-1)}\right),\end{aligned}$$

et la valeur de G, exprimée tout entière en suites convergentes, sera

$$(b) \quad . \quad . \quad . \quad G = \Sigma' L^{(\mu)} \log. \text{tang.} \left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^{(\mu)}\right) - \frac{B}{c}\Psi(\mu);$$

formule, dans laquelle les termes négligés sont de l'ordre $\Sigma' L^{(\mu)} b^{(\mu)2}$, si tang. $\varphi^{(\mu)}$ n'est pas d'une grandeur comparable à celle de $\frac{1}{b^{(\mu)}}$ (§ 87).

§ 96. Pour avoir la valeur de la fonction G quand elle devient complète, on pourrait faire $\varphi = 90^\circ$ dans la formule générale (b); mais cette formule ne se simplifierait pas sensiblement, et contiendrait toujours un nombre de termes indéfini. C'est pourquoi, il vaudra mieux employer celle qui va suivre.

Soit φ une certaine amplitude, telle que $\varphi^{(\mu-1)} = 90^\circ$: on aura, en rétrogradant (§ 82),

$$\varphi^{(\mu-2)} = \pi, \quad \varphi^{(\mu-3)} = 2\pi, \quad \text{etc.},$$
$$\varphi^{(\mu-i)} = 2^{i-2}\pi, \quad \varphi' = 2^{\mu-3}\pi,$$
$$\varphi = 2^{\mu-2}\pi = 2^{\mu-1} \cdot \frac{\pi}{2},$$

et, par conséquent,

$$G(c, \varphi) = G\left(c, 2^{\mu-1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2^{\mu-1} G\left(c, \frac{\pi}{2}\right):$$

remplaçant $G(c, \varphi)$ par sa valeur donnée par la formule (b), il vient

$$G\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^{\mu-1}}\left\{\Sigma' L^{(\mu)} \log. \text{tang.} \left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^{(\mu)}\right) - \frac{B}{c}\Psi(\mu)\right\};$$

mais, d'après ce que nous avons vu au § 87, lorsque $\varphi^{(\mu-1)} = 90^\circ$, on a

$$\text{tang.}\, \varphi^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{b^{(\mu)}}}, \quad \sin.\, \varphi^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^{(\mu)}}};$$

et, dans l'hypothèse où $b^{(\mu)2}$ est de l'ordre des quantités négligeables, cette expression de $\sin.\, \varphi^{(\mu)}$ se réduit à $1 - \frac{1}{2}b^{(\mu)}$: on peut donc écrire

$$\log. \text{tang.} \left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^{(\mu)}\right) = \tfrac{1}{2} \log. \left(\frac{1 + \sin.\, \varphi^{(\mu)}}{1 - \sin.\, \varphi^{(\mu)}}\right) = \tfrac{1}{2} \log. \left(\frac{4}{b^{(\mu)}}\right).$$

En même temps, la quantité $\Psi(\mu)$, donnée par l'équation (1), se réduit à

$$\Psi(\mu) = \frac{2^{\mu} c^{(\mu)} \sin.\varphi^{(\mu)}}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-1)}}} - \frac{2^{\mu-1} \sin.\varphi^{(\mu-1)}}{\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-2)}}},$$

à cause de $\sin.\varphi^{(\mu-2)} = o$, $\sin.\varphi^{(\mu-3)} = o$, etc. : et puisqu'on a

$$\sin.\varphi^{(\mu-1)} = 1, \quad c^{(\mu)} = 1, \quad \Sigma' = \frac{1}{c}\sqrt{cc'c''\ldots c^{(\mu-1)}},$$

la dernière valeur de $\Psi(\mu)$ peut s'écrire sous la forme

$$\Psi(\mu) = \frac{2^{\mu-1}}{c\Sigma'}\left(2 \sin.\varphi^{(\mu)} - \sqrt{c^{(\mu-1)}}\right) :$$

remplaçant $\sin.\varphi^{(\mu)}$ par $1 - \frac{1}{2}b^{(\mu)}$, et substituant à $\sqrt{c^{(\mu-1)}}$, sa valeur approchée $1 - b^{(\mu)}$, déduite de la relation $c^{(\mu-1)} = \frac{1 - b^{(\mu)}}{1 + b^{(\mu)}}$, il reste $\Psi(\mu) = \frac{2^{\mu-1}}{c\Sigma'}$, et finalement

$$(b') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad G\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Sigma' L^{(\mu)}}{2^{\mu}} \log.\frac{4}{b^{(\mu)}} - \frac{B}{c^2\Sigma'}.$$

§ 97. Les formules (a), (a'), (b) et (b'), permettent d'obtenir une valeur aussi approchée qu'on voudra, tant de la fonction indéfinie $G(c, \varphi)$, que de la fonction complète $G\left(c, \frac{\pi}{2}\right)$. Pour les appliquer aux epsilon, il suffira de prendre

$$A = 1, \; B = -c^2; \text{ d'où } G = \int \Delta d\varphi.$$

En dénotant par M, ce que devient $A_{(\mu)}$ (§ 92) par ces valeurs de A et de B, l'expression de l'epsilon indéfini, donnée par la première méthode, sera

$$\text{eps.}(c, \varphi) = \Sigma M x + \frac{c\sqrt{c_{,}}}{2} \sin.\varphi_{,} + \frac{c\sqrt{c_{,}c_{,,}}}{4} \sin.\varphi_{,,} + \text{etc.},$$

et celle du quart d'ellipse

$$E(c) = \Sigma M \frac{\pi}{2}.$$

Dans ces formules, la quantité M est donnée par la suite convergente

$$M = 1 - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2 c_{,}}{4} - \frac{c^2 c_{,} c_{,,}}{4} - \text{etc.},$$

à laquelle on peut donner cette autre forme

$$M = \frac{c^2}{4c_{,}}\left(1 - \frac{c^2{}_{,}c_{,,}}{2} - \frac{c^2{}_{,}c_{,,}c_{,,,}}{4} - \frac{c_{,}{}^2c_{,,}c_{,,,}c_{,,,,}}{8} - \text{etc.}\right),$$

en vertu de la relation $1 - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2c_{,}}{4} = \frac{c^2}{4c_{,}}$.

Les formules précédentes offrent les suites les plus convergentes qu'on puisse desirer pour la rectification de l'ellipse. Si le module c est assez peu différent de l'unité pour qu'on juge nécessaire d'appliquer la seconde méthode, il faudra faire $A = 1$, $B = -c^2$ dans les formules du § 95; ce qui donnera, en désignant par M' ce que devient $L^{(\mu)}$ par ces valeurs,

$$M' = b^2 - bc\left[\sqrt{b'} + \sqrt{\frac{b'b''}{c}} + \sqrt{\frac{b'b''b'''}{cc'}} \ldots + \sqrt{\frac{b'b''\ldots b^{(\mu)}}{cc'\ldots c^{(\mu-2)}}}\right],$$

ou plus simplement, parce que $b\sqrt{b'} = 1 - c$,

$$M' = b\sqrt{b'}\left[1 - \sqrt{cb''} - \sqrt{\frac{cb''b'''}{c'}} \ldots - \sqrt{\frac{cb''b'''\ldots b^{(\mu)}}{c'c''c'''\ldots c^{(\mu-2)}}}\right].$$

Quant à la valeur de Σ', et à celle de la fonction $\Psi(\mu)$, elles ne dépendent point des valeurs de A et de B : ainsi, elles restent les mêmes que dans le paragraphe cité. On aura donc, d'après ces valeurs, la fonction indéfinie

$$\text{eps.}(c, \varphi) = \Sigma' M' \log.\text{tang.}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^{(\mu)}\right) + c\Psi(\mu),$$

et la fonction complète

$$E(c) = \frac{\Sigma' M'}{2^\mu} \log.\left(\frac{4}{b^{(\mu)}}\right) + \frac{1}{\Sigma'}.$$

Comparant cette formule avec la valeur de $D(c)$ donnée au § 88, on trouve pour M',

$$M' = \frac{E}{D} - \frac{1}{D\Sigma'}.$$

Au moyen de cette équation, le calcul de la fonction incomplète eps. φ, s'abrègera par l'emploi des tables des fonctions complètes D et E.

CHAPITRE XI.

Transformation du module dans les kappa et dans les upsilon.

---

§ 98. Si l'on appliquait la méthode des modules décroissants à la simple fonction kappa, la première transformée contiendrait une partie affectée de la fonction de première espèce dig. (c, φ) : par conséquent, il convient, pour l'uniformité des résultats, d'admettre une forme plus générale, et de considérer la formule

$$H = \int \left(A + B \frac{\sin.^2\varphi}{1 + n \sin.^2\varphi} \right) \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

C'est ainsi qu'au § 92, nous avons traité des fonctions G au lieu des simples epsilon.

Après avoir écrit la formule précédente, sous la forme

$$H = \int \left(A + \frac{B}{n} - \frac{B}{n} \cdot \frac{1}{1 + n \sin.^2\varphi} \right) \frac{d\varphi}{\Delta},$$

si l'on fait

$$\sin.^2\varphi = \tfrac{1}{2}(1 + c, \sin.^2\varphi, - \Delta, \cos.\varphi,),$$

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1 + c,}{2} \frac{d\varphi,}{\Delta,},$$

comme au § 92, on aura

$$H = \frac{1 + c,}{2} \int \left(A + \frac{B}{n} - \frac{B}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}nc, \sin.^2\varphi, - \frac{1}{2}n\Delta, \cos.\varphi,} \right) \frac{d\varphi,}{\Delta,}.$$

Dans cette équation, le dénominateur de la fraction principale contient le terme $\frac{1}{2}n\Delta, \cos.\varphi,$, qui paraît empêcher la réduction de la

fonction H, à une autre fonction $H_{,}$ de la même espèce. Pour nous en débarrasser, nous considèrerons ce dénominateur comme la différence de deux quantités, afin qu'en multipliant cette différence par la somme des mêmes quantités, on ait la différence de leurs carrés. Ainsi, nous multiplierons les deux termes de la fraction dont il s'agit, par le polynome $1+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}nc_{,}\sin.^2\varphi_{,}+\frac{1}{2}n\Delta_{,}\cos.\varphi_{,}$, et nous désignerons par V le produit de ce polynome par le dénominateur; ce qui donnera, après réduction,

$$1+n+(nc_{,}+\tfrac{1}{2}n^2c_{,}+\tfrac{1}{4}n^2+\tfrac{1}{4}n^2c_{,}^2)\sin.^2\varphi_{,}=V.$$

Ce qui est vraiment remarquable, c'est que V ne contient aucune puissance de sin. $\varphi_{,}$ autre que la seconde; d'où l'on peut déjà inférer la possibilité de la réduction demandée.

En effet, ayant posé l'équation

$$(1+n)\ (1+n_{,}\sin.^2\varphi_{,})=V,$$

en la comparant à celle qui précède, nous en déduirons pour $n_{,}$,

$$\begin{aligned} n_{,} &= \frac{n}{1+n}(c_{,}+\tfrac{1}{2}nc_{,}+\tfrac{1}{4}n+\tfrac{1}{4}nc_{,}^2) \\ &= \frac{n}{1+n}[c_{,}+n(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}c_{,}+\tfrac{1}{4}c_{,}^2)] \\ &= \frac{n}{1+n}\left[c_{,}+\frac{n}{4}(1+c_{,})^2\right], \end{aligned}$$

et à cause de $c_{,}=\dfrac{1-b}{1+b}$ (§ 80),

$$(1).\ \ldots\ldots\ n_{,}=\frac{n(n+c^2)}{(1+b)^2\,(1+n)}.$$

Alors, la fonction H deviendra

$$H=\frac{1+c_{,}}{2}\int\left(A+\frac{B}{n}-\frac{B}{n(1+n)}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}nc_{,}\sin.^2\varphi_{,}+\frac{1}{2}n\Delta_{,}\cos.\varphi_{,}}{1+n_{,}\sin.^2\varphi_{,}}\right),$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{B}{n(1+n)}\cdot(1+\tfrac{1}{2}n)=M,\quad \frac{B}{1+n}=N,$$

on aura

$$H = \frac{1+c_,}{2}\int\left[A + \frac{B}{n} - M + \left(\frac{(Mn_, - \frac{1}{2}c_,N)\sin.^2\varphi_,)}{1+n_,\sin.^2\varphi_,}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}N\frac{\Delta_,\cos.\varphi_,}{1+n_,\sin.^2\varphi_,}\right]\frac{d\varphi_,}{\Delta_,};$$

par où l'on voit que, si l'on pose

$$A_, = A + \frac{B}{n} - M = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n},$$

$$B_, = Mn_, - \frac{1}{2}c_,N = \frac{1}{2}B\frac{c^2+2n+n^2}{(1+b)^2(1+n)^2},$$

$$H_, = \int\left(A_, + B_,\frac{\sin.^2\varphi}{1+n_,\sin.^2\varphi_,}\right)\frac{d\varphi_,}{\Delta_,},$$

on aura, pour première transformée,

$$H = \frac{1+c_,}{2}\left[H_, - \frac{\frac{1}{2}B}{1+n}\int\frac{\cos.\varphi_,d\varphi_,}{1+n_,\sin.^2\varphi_,}\right].$$

Par cette formule, la fonction $H(n, c, \varphi)$ est ramenée à une fonction semblable $H(n_,, c_,, \varphi_,)$, dans laquelle les trois éléments n, c, φ ont subi des changements propres à faciliter les approximations. Quant à l'intégrale qui entre dans son expression, on trouve aisément sa valeur

$$\int\frac{d\varphi_,\cos.\varphi_,}{1+n_,\sin.^2\varphi_,} = \frac{1}{\sqrt{n_,}}\text{arc}\,(\text{tang.} = \sqrt{n_,}\sin.\varphi_,).$$

La même loi aura lieu pour les transformées ultérieures ; d'où résultera une suite infinie de fonctions $H(n, c, \varphi)$, $H(n_,, c_,, \varphi_,)$, $H(n_{,,}, c_{,,}, \varphi_{,,})$, etc., telles qu'une seule étant connue, on pourra déterminer toutes les autres. On trouvera de cette manière, en se rappelant que

$$\frac{1+c_,}{2} = \frac{\sqrt{c_,}}{c},\quad \frac{1+c_{,,}}{2} = \frac{\sqrt{c_{,,}}}{c_,},\ \text{etc.},$$

et en désignant par Σ le même produit qu'au § 83,

$$H = \frac{\Sigma}{2^{\mu}} H_{(\mu)}$$

$$- \frac{\sqrt{c_{,}}}{c} \cdot \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n_{,}} \sin. \varphi_{,})}{\sqrt{n_{,}}}$$

$$- \frac{\sqrt{c_{,}}}{c} \cdot \frac{\sqrt{c_{,,}}}{c_{,}} \cdot \frac{\frac{1}{2}B_{,}}{1+n_{,}} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n_{,,}} \sin. \varphi_{,,})}{\sqrt{n_{,,}}}$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \frac{\sqrt{c_{,}}}{c} \cdots \frac{\sqrt{c_{(\mu)}}}{c_{(\mu-1)}} \cdot \frac{\frac{1}{2}B_{(\mu-1)}}{1+n_{(\mu-1)}} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n_{(\mu)}} \sin. \varphi_{(\mu)})}{\sqrt{n_{(\mu)}}};$$

série dans laquelle on a pris

$$H_{(\mu)} = \int \left(A_{(\mu)} + B_{(\mu)} \frac{\sin.^2 \varphi_{(\mu)}}{1 + n_{(\mu)} \sin.^2 \varphi_{(\mu)}} \right) \frac{d\varphi_{(\mu)}}{\Delta_{(\mu)}}.$$

§ 99. Posons, pour abréger,

$$k = \frac{c^2 + 2n + n^2}{(1+b)^2(1+n)^2} = \frac{(1+n)^2 - b^2}{(1+b)^2(1+n)^2},$$

et soit désignée par $k_{(\mu)}$ une quantité composée en $c_{(\mu)}$, $b_{(\mu)}$ et $n_{(\mu)}$, comme k l'est en c, b et n : on aura

$$B_{,} = \tfrac{1}{2}kB,$$
$$B_{,,} = \tfrac{1}{4}kk_{,}B,$$
$$\cdots\cdots$$
$$B_{(\mu)} = (\tfrac{1}{2})^{\mu} kk_{,} \ldots k_{(\mu-1)} B,$$

et pareillement

$$A_{,} = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n},$$

$$A_{,,} = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} + \frac{\frac{1}{4}kB}{1+n_{,}},$$

$$A_{,,,} = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} + \frac{\frac{1}{4}kB}{1+n_{,}} + \frac{\frac{1}{8}kk_{,}B}{1+n_{,,}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{(\mu)} = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} + \frac{\frac{1}{4}kB}{1+n_{,}} + \frac{\frac{1}{8}kk_{,}B}{1+n_{,,}} + \cdots\cdots + \frac{(\frac{1}{2})^{\mu} kk_{,} \ldots k_{(\mu-2)} B}{1+n_{(\mu-1)}}.$$

Nous démontrerons tout à l'heure que $B_{(\mu)}$ s'évanouissant avec $c_{(\mu)}$, l'intégrale $H_{(\mu)}$ se réduit à

$$H_{(\mu)} = A_{(\mu)} \operatorname{dig.}(c_{(\mu)}, \varphi_{(\mu)}),$$

et, par conséquent (§ 83), à

$$H_{(\mu)} = 2^{\mu} A_{(\mu)} x,$$

x désignant toujours l'angle-limite. La valeur précédente de H devient, pour lors,

$$(a)\left\{\begin{aligned} H = \Sigma A_{(\mu)} x &- \frac{\sqrt{c_{,}}}{c} \cdot \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n_{,}} \sin.\varphi_{,})}{\sqrt{n_{,}}} \\ &- \frac{\sqrt{c_{,}}}{c} \cdot \frac{\sqrt{c_{,,}}}{c} \cdot \frac{\frac{1}{4}kB}{1+n_{,}} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n_{,,}} \sin.\varphi_{,,})}{\sqrt{n_{,,}}} \\ &- \frac{\sqrt{c_{,}}}{c} \cdot \frac{\sqrt{c_{,,}}}{c_{,}} \cdot \frac{\sqrt{c_{,,,}}}{c_{,,}} \cdot \frac{\frac{1}{8}kk_{,}B}{1+n_{,,}} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n_{,,,}} \sin.\varphi_{,,,})}{\sqrt{n_{,,,}}} \\ &- \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Cette suite étant prolongée jusqu'au terme dont le rang est μ inclusivement, l'erreur de la formule mesurée par les termes suivants, ne pourra être que de l'ordre $c_{(\mu+1)}$; de sorte que, si l'on ne veut pousser la précision que jusqu'aux termes de l'ordre $c_{(\mu)}$, on aura un terme de moins à calculer, tant dans la suite précédente que dans la valeur de Σ et dans celle de $A_{(\mu)}$.

Les arcs de cercle qui entrent dans la formule générale (a) se changeraient en logarithmes, si n était de la forme $-c^2 \sin.^2\theta$ (§ 40); mais ce changement n'est sujet à aucune difficulté.

Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, tous les arcs de cercle disparaissent, et l'on a simplement $H = \Sigma A_{(\mu)} x$. Mais x est alors égal à $\frac{1}{2}\pi$ (§ 83) : par conséquent, la fonction complète a pour valeur

$$H(n, c, \tfrac{1}{2}\pi) = \Sigma A_{(\mu)} \tfrac{1}{2}\pi.$$

On peut remarquer que la valeur de H, exprimée par les transformées successives, se terminerait d'elle-même si l'on avait une des égalités

$$k = 0, \quad k_{,} = 0, \quad k_{,,} = 0, \quad \text{etc.}$$

En effet, ces égalités reviennent à

$$n = -1 + b, \quad n_{,} = -1 + b_{,}, \quad n_{,,} = -1 + b_{,,}, \text{ etc.},$$

et l'on sait qu'alors la fonction H se réduit à un digamma (§ 41).

§ 100. Nous avons vu au chapitre V, que tout kappa peut s'exprimer par un autre kappa ayant pour type du paramètre

$$n = c \sin.\theta, \text{ ou } n = -c^2 \sin.^2\theta.$$

Soit d'abord

$$n = c \sin.\theta,$$

et faisons $n_{,} = c_{,} \sin.\theta_{,}$: en substituant à n et à $n_{,}$ ces valeurs dans l'équation (1), on en déduit

$$\sin.\theta_{,} = \sin.\theta. \frac{c + \sin.\theta}{1 + c \sin.\theta};$$

ce qui prouve que $\sin.\theta_{,}$ est non-seulement moindre que l'unité, mais aussi moindre que $\sin.\theta$. En effet, pour que cette dernière condition soit remplie, il suffit que l'on ait

$$c + \sin.\theta < 1 + c \sin.\theta;$$

inégalité qui revient à

$$(1 - c) \sin.\theta < 1 - c,$$

et, par conséquent, à $\sin.\theta < 1$; ce qui est toujours vrai. Ainsi, dans la suite des paramètres

$$n, \quad n_{,}, \quad n_{,,}, \text{ etc.},$$

chaque terme est non-seulement moindre que le terme correspondant de la suite

$$c, \quad c_{,}, \quad c_{,,}, \text{ etc.},$$

mais la première série décroît plus rapidement que la seconde.

Soit maintenant

$$n = -c^2 \sin.^2\theta:$$

on pourra faire, comme dans le cas précédent,

$$n_{,} = -c_{,}^2 \sin^2\theta_{,},$$

et l'angle $\theta_{,}$ sera déterminé par l'équation

$$\sin.\theta_{,} = (1 + b) \frac{\sin.\theta \cos.\theta}{\Delta(b, \theta)};$$

ce qui est la même loi suivant laquelle $\varphi_{,}$ se déduit de φ (§ 80). A la série des modules

$$c,\ c_{,},\ c_{,,},\ \text{etc.},$$

correspondra donc la suite des paramètres

$$-c^2 \sin.^2\theta,\ -c_{,}^2 \sin.^2\theta_{,},\ -c_{,,}^2 \sin.^2\theta_{,,},\ \text{etc.},$$

dont chaque terme est, comme on le voit, beaucoup plus petit que le terme correspondant de la première suite.

La discussion qui précède nous ayant fait connaître l'ordre de grandeur du paramètre $n_{(\mu)}$, venons à celui du coefficient $B_{(\mu)}$. D'après la valeur de cette quantité, elle est de l'ordre $k_{(\mu-1)}$, et d'après l'expression de k en n, il est évident que $k_{(\mu-1)}$ est au plus de l'ordre $n_{(\mu-1)}$. Mais si l'on a $n = -c^2 \sin.^2\theta$, on a aussi

$$n_{(\mu-1)} = -c^2_{(\mu-1)} \sin.^2\theta_{(\mu-1)};$$

et comme $c^2_{(\mu-1)}$ est de l'ordre $c_{(\mu)}$, en vertu de l'équation

$$c_{(\mu-1)} = \frac{2\sqrt{c_{(\mu)}}}{1+c_{(\mu)}},$$

il s'ensuit que, dans ce cas (qui est celui des kappa logarithmiques), $c_{(\mu)}$, $n_{(\mu-1)}$, $k_{(\mu-1)}$ et $B_{(\mu)}$ deviennent négligeables en même temps.

Il en serait de même si le type du paramètre étant $n = c \sin.\theta$, on avait $\sin.\theta = c$, ou $\sin.\theta < c$. En effet, d'après la loi de progression des angles θ, $\theta_{,}$, $\theta_{,,}$, etc., leurs sinus décroissent plus rapidement encore que les modules c, $c_{,}$, $c_{,,}$, etc. Si l'on avait $\sin.\theta > c$, il suffirait de calculer un terme de plus dans la série (a), et dans celles qui en dépendent, pour atteindre le même degré de précision.

§ 101. Pour transformer les valeurs de $n_{,}$ et de k de manière à les approprier au calcul logarithmique, soit λ un angle auxiliaire tel que

$$\sin.\lambda = \frac{b}{\sqrt{1+n}};$$

d'où

$$(2).\ \ldots\ldots\ 1+n = \frac{b^2}{\sin.^2\lambda};$$

ce qui est possible pour les deux types du paramètre

$$n = c \sin.\theta, \text{ et } n = -c^2 \sin.^2\theta :$$

si l'on fait pareillement

$$1 + n_, = \frac{b_,^2}{\sin.^2\lambda_,},$$

l'angle $\lambda_,$ se déduira de l'angle λ par cette formule, aussi simple qu'élégante,

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\lambda_, = \frac{\sin.\lambda}{\sqrt{b}},$$

et le paramètre $n_,$ se déduira de n par la relation

$$n_, = n \frac{c_, \cos.^2\lambda}{c^2}.$$

Des équations (2) et (3) on tire sur-le-champ

$$1 + n = b \cot.^2\tfrac{1}{2}\lambda_, ;$$

par où la valeur précédente de k devient

$$k = \frac{(1+n)^2 - b^2}{(1+b)^2(1+n)^2} = \frac{1}{(1+b)^2} \cdot \frac{\cot.^4\frac{1}{2}\lambda_, - 1}{\cot.^4\frac{1}{2}\lambda_,},$$

et, à cause de

$$b_,^2 = \frac{4b}{(1+b)^2} \text{ et de } \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\lambda_, = \frac{1}{\cot.^2\frac{1}{2}\lambda_,},$$

on peut écrire

$$k = \frac{b_,^2}{4b} \cdot \frac{\cot.^2\frac{1}{2}\lambda_, - \text{tang.}^2\frac{1}{2}\lambda_,}{\cot.^2\frac{1}{2}\lambda_,}.$$

Mais les formules trigonométriques

$$\cot.^2\tfrac{1}{2}\lambda_, = \frac{(1+\cos.\lambda_,)^2}{\sin.^2\lambda_,}, \quad \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\lambda_, = \frac{(1-\cos.\lambda_,)^2}{\sin.^2\lambda_,},$$

donnent

$$\cot.^2\tfrac{1}{2}\lambda_, - \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\lambda_, = \frac{4\cos.\lambda_,}{\sin.^2\lambda_,} ;$$

par conséquent

$$k = \frac{b_{,}^{2}}{b} \cdot \frac{\cos.\lambda_{,}}{\sin.^{2}\lambda_{,}\cot.^{2}\frac{1}{2}\lambda_{,}} = \frac{b_{,}^{2}}{b^{2}} \cdot \frac{\sin.^{2}\lambda}{\sin.^{2}\lambda_{,}} \cos.\lambda_{,};$$

d'où

$$\frac{k}{1+n_{,}} = \frac{1}{1+n} \cos.\lambda_{,}.$$

On trouve de même

$$\frac{kk_{,}}{1+n_{,,}} = \frac{1}{1+n} \cos.\lambda_{,} \cos.\lambda_{,,},$$

$$\frac{kk_{,}k_{,,}}{1+n_{,,,}} = \frac{1}{1+n} \cos.\lambda_{,} \cos.\lambda_{,,} \cos.\lambda_{,,,},$$

etc.;

$$A_{(\mu)} = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n}\left[1 + \frac{1}{2}\cos.\lambda_{,} + \frac{1}{4}\cos.\lambda_{,}\cos.\lambda_{,,} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{\mu-1}}\cos.\lambda_{,}\cos.\lambda_{,,}\ldots\ldots\cos.\lambda_{(\mu-1)}\right],$$

et finalement

$$(a') \quad \ldots\ldots\ldots \quad H = \Sigma A_{(\mu)} x$$

$$-\left(\frac{B}{1+n}\right)\left\{\begin{array}{l} \frac{\sqrt{c_{,}}}{c} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n_{,}}\sin.\varphi_{,})}{\sqrt{n_{,}}} \\ + \frac{\sqrt{c_{,}}}{c} \cdot \frac{\sqrt{c_{,,}}}{c_{,}} \cdot \frac{1}{4}\cos.\lambda_{,} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n_{,,}}\sin.\varphi_{,,})}{\sqrt{n_{,,}}} \\ + \frac{\sqrt{c_{,}}}{c} \cdot \frac{\sqrt{c_{,,}}}{c_{,}} \cdot \frac{\sqrt{c_{,,,}}}{c_{,,}} \cdot \frac{1}{8}\cos.\lambda_{,}\cos\lambda_{,,} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n_{,,,}}\sin.\varphi_{,,,})}{\sqrt{n_{,,,}}} \\ + \text{etc.} \end{array}\right.$$

§ 102. La formule d'approximation que nous venons de donner pour déterminer la valeur des fonctions H, peut s'appliquer à tous les cas, et le plus souvent il ne faudra calculer que fort peu de termes pour obtenir un grand degré de précision. Cependant, si la

différence $1 - c$ est assez petite pour que b^2 puisse être négligé, on pourra intégrer immédiatement la formule

$$H = \int \left(A + \frac{B \sin.^2 \varphi}{1 + n \sin.^2 \varphi} \right) \frac{d\varphi}{\Delta},$$

en mettant $\cos.\varphi$ au lieu de Δ, ce qui donnera

$$H = \left(A + \frac{B}{1+n} \right) \log.\tang.(45^\circ + \varphi) - \frac{B}{1+n} \cdot \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n} \sin.\varphi)}{\sqrt{n}}.$$

Cette intégrale est rigoureuse lorsque $c = 1$; mais s'il y a une différence, quelque petite qu'elle soit, entre 1 et c, elle ne pourra s'appliquer sans erreur, à des valeurs de φ plus grandes qu'une certaine limite. En effet, la quantité Δ qui, en général, est $\sqrt{\cos.^2\varphi + b^2 \sin.^2\varphi}$, ne se réduit à $\cos.\varphi$ que lorsque $\cot.\varphi$ est censé beaucoup plus grand que b. C'est pourquoi, il convient de chercher une formule qui donne la valeur de H pour toute valeur de φ, toujours dans l'hypothèse qu'on puisse négliger les termes affectés du facteur b, élevé au carré ou à une puissance supérieure.

Pour y parvenir, j'écris la fonction H sous la forme

$$H = \left(A + \frac{B}{1+n} \right) \text{dig.}(c, \varphi) - \frac{B}{1+n} P,$$

et il restera à déterminer P par la formule

$$P = \int \frac{d\varphi \cos.^2 \varphi}{(1 + n \sin.^2 \varphi)\Delta}.$$

J'observe ensuite qu'on a

$$\frac{\cos.\varphi}{\Delta} = 1 - \frac{b^2 \sin.^2 \varphi}{\Delta(\cos.\varphi + \Delta)}:$$

donc, si l'on fait

$$Q = \int \frac{2 d\varphi \cos.\varphi \sin.^2 \varphi}{(1 + n \sin.^2 \varphi)\Delta (\cos.\varphi + \Delta)},$$

on aura

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n} \sin.\varphi)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} b^2 Q:$$

ainsi, tout se réduit à trouver une valeur approchée de l'intégrale Q. A cet effet, j'observe qu'on a $\cos.\varphi + \Delta < 2\Delta$, et $\cos.\varphi + \Delta > 2\cos.\varphi$: donc, si l'on fait

$$Q' = \int \frac{d\varphi \sin.^2\varphi}{(1 + n\sin.^2\varphi)\Delta}, \quad Q'' = \int \frac{d\varphi \cos.\varphi \sin.^2\varphi}{(1 + n\sin.^2\varphi)(1 - c^2\sin.^2\varphi)},$$

on aura $Q < Q'$ et $Q > Q''$. Or, en premier lieu, la combinaison des intégrales P et Q', donne

$$(1 + n)Q' + P = \int \frac{d\varphi}{\Delta}; \quad \text{d'où résulte } Q' = \frac{\text{dig.}(c, \varphi) - P}{1 + n} :$$

donc on a

$$P > \frac{\text{arctang.}(\sqrt{n}\sin.\varphi)}{\sqrt{n}} - \frac{\frac{1}{2}b^2}{1 + n}\text{dig.}(c, \varphi) + \frac{\frac{1}{2}b^2}{1 + n}P,$$

ou en écrivant, dans le second membre, au lieu de P sa valeur donnée par l'équation (4),

$$(5).\ P > \left(1 + \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n}\right)\frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n}\sin.\varphi)}{\sqrt{n}} - \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n}\text{dig.}(c, \varphi) - \frac{\frac{1}{4}b^4}{1+n}Q;$$

inégalité dans laquelle on pourra négliger le terme en b^4.

Cherchons maintenant la limite supérieure de P. On trouve, par l'intégration directe de la valeur de Q'',

$$(c^2 + n)Q'' = \frac{1}{2c}\log.\left(\frac{1 + c\sin.\varphi}{1 - c\sin.\varphi}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\text{arc tang.}(\sqrt{n}\sin.\varphi),$$

ou (en rejetant les quantités de l'ordre b^2, qui n'en produiraient que de l'ordre b^4 dans P, lors de leur substitution dans l'équation (4),)

$$(1 + n)Q'' = \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1 + c\sin.\varphi}{1 - c\sin.\varphi}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\text{arc tang.}(\sqrt{n}\sin.\varphi) :$$

donc on a

$$(6).\ P < \left(1 + \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n}\right)\frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n}\sin.\varphi)}{\sqrt{n}} - \frac{\frac{1}{4}b^2}{1+n}\log.\left(\frac{1 + c\sin.\varphi}{1 - c\sin.\varphi}\right).$$

La plus grande différence entre les deux limites de P données par les inégalités (5) et (6), a lieu lorsque $\varphi = 90°$; et comme on a, dans ce cas,

$$D(c) = \log.\left(\frac{4}{b}\right),\ \log.\left(\frac{1+c}{1-c}\right) = 2\log.\left(\frac{2}{b}\right),$$

cette différence est égale à $\frac{b^2}{1+n}.\frac{1}{2}\log.2$. Ainsi, elle est de l'ordre des quantités qu'on veut négliger, et l'on a, avec une exactitude suffisante,

$$P = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\text{arc tang.}(\sqrt{n}\sin.\varphi) - \frac{\frac{1}{2}b^2}{1+n}\,\text{dig.}(c, \varphi);$$

ce qui donne, pour la fonction cherchée,

$$H = \left(A + \frac{B}{1+n}\right)\text{dig.}(c, \varphi) - \frac{B}{1+n}.\frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n}\sin.\varphi)}{\sqrt{n}},$$

et, pour la fonction complète,

$$H\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = \left(A + \frac{B}{1+n}\right)\log.\frac{4}{b} - \frac{B}{1+n}.\frac{\text{arc tang.}(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}.$$

§ 103. Les valeurs précédentes sont celles qu'il convient d'employer si la différence $\frac{b^2}{1+n}.\frac{1}{2}\log.2$ est assez petite pour être négligée, et c'est ce qui a lieu chaque fois que n est positif, ou de la forme $n = \cot.^2\theta$; mais il n'en est pas toujours de même si n est négatif. Le cas de $n = -c^2\sin.^2\theta$, ne souffre aucune difficulté si θ n'est pas trop près de 90°, parce qu'alors $\frac{b^2}{1+n}$ reste une quantité très-petite : seulement, il faut changer alors l'expression $\frac{\text{arc (tang.} = \sqrt{n}\sin.\varphi)}{\sqrt{n}}$ en celle-ci : $\frac{1}{2c\sin.\theta}.\log.\left(\frac{1+c\sin.\theta\sin.\varphi}{1-c\sin.\theta\sin.\varphi}\right)$. Mais si, en même temps, θ est très-près de 90°, le dénominateur $1+n$ équivalant à $b^2 + c^2\cos.^2\theta$, devient très-petit. Cependant, tant que $\cos.\theta$ est beaucoup plus grand que b, la fraction $\frac{b^2}{1+n}$ ou $\frac{b^2}{b^2+c^2\cos.^2\theta}$, reste très-petite, et la méthode précédente est applicable; mais si $\cos.\theta$ est une quantité très-petite de l'ordre b, ou d'un ordre supérieur, la fraction $\frac{b^2}{1+n}$ cesse d'être négligeable. Pour obvier à cet inconvénient, il faut recourir au § 41, où l'on a vu que tout kappa qui a pour paramètre $n = -c^2\sin.^2\theta$, peut être transformé en un autre kappa ayant pour

paramètre $m = -c^2 \sin.^2\lambda$, pourvu qu'entre les angles θ et λ on ait la relation b tang. θ tang. $\lambda = 1$, qui revient à (§ 19)

$$\frac{b^2}{1+n} \cdot \frac{b^2}{1+m} = b^2 :$$

donc, des deux facteurs $\frac{b^2}{1+n}$, $\frac{b^2}{1+m}$, il y en a toujours un plus petit que b; d'où il suit, qu'à l'aide de la transformation de kal.(θ, c, φ) en kal.(λ, c, φ), si elle est nécessaire, l'erreur de la formule n'excèdera pas les quantités de l'ordre b. Dans le cas le plus défavorable, qui est celui ou $1+n = 1+m = b$, l'erreur absolue sera égale à $\frac{1}{2} b \log. 2$; mais alors la fonction complète a pour valeur

$$\left(A + \frac{B}{2b}\right) \log. \frac{4}{b} :$$

par conséquent, l'erreur relative, qui a pour mesure le rapport de ces quantités, ne s'élèvera qu'à l'ordre b^2.

Lorsque $n = -\frac{1}{\sin.^2\theta}$, la fraction $\frac{b^2}{1+n}$ est négligeable, si tang. θ n'excède pas l'unité : dans le cas contraire, on ramènera le kappa proposé au type $n = -c^2 \sin.^2\theta$, que nous venons de discuter.

Lorsque $n = -1 + b^2 \sin.^2\theta$, on élude la difficulté au moyen de la formule (a) du § 38, qui sert à transformer tout kappa circulaire dont le paramètre est négatif, en un autre kappa, à paramètre positif.

§ 104. Lorsque le module c n'est pas assez voisin de l'unité, pour que b^2 soit de l'ordre des quantités négligeables, on pourrait croire qu'il convient de recourir à la méthode des modules croissants, comme nous l'avons fait pour les digamma et les epsilon. Mais les formules auxquelles Legendre est parvenu par cette méthode, sont si compliquées et d'une convergence si faible, que cet habile calculateur conseille lui-même de s'en tenir à la méthode des modules décroissants, quand bien même il faudrait calculer quelques modules et quelques amplitudes de plus, pour obtenir l'approximation désirée. Nous ferons observer, en outre, que si le kappa proposé est circulaire, on pourra toujours le faire dépendre d'un autre kappa du module b (module qui sera d'autant plus petit, que c sera plus grand), au moyen des formules (e) ou (e') du § 56. Si le kappa est logarithmique,

on le réduira à deux upsilon, que l'on calculera, dans tous les cas, avec autant de facilité que les fonctions elliptiques de la seconde espèce, par les formules qui seront données ci-après. Ainsi, l'on pourra toujours se dispenser d'appliquer la méthode des modules croissants, aux fonctions elliptiques de la troisième espèce.

§ 105. Il existe pour les kappa circulaires, une propriété analogue à celle dont jouissent les angles des paramètres successifs n, $n_{,}$, $n_{,,}$, $n_{,,,}$, etc., pour les kappa logarithmiques (§ 100). Soient

$$n = c^2 \text{ tang.}^2\lambda, \quad n_{,} = c_{,}^2 \text{ tang.}^2\mu :$$

si l'on fait

$$\text{tang.}^2\lambda = -\sin.^2\alpha, \quad \text{tang.}^2\mu = -\sin.^2\mathcal{C},$$

les deux fonctions kap. (n, c, φ), kap. $(n_{,}, c_{,}, \varphi_{,})$, de circulaires deviendront logarithmiques, c'est-à-dire qu'on obtiendra

$$\text{kap.}(c^2 \text{ tang.}^2\lambda, c, \varphi) = \text{kal.}(\alpha, c, \varphi),$$
$$\text{kap.}(c^2 \text{ tang.}^2\mu, c_{,}, \varphi_{,}) = \text{kal.}(\mathcal{C}, c_{,}, \varphi_{,}) :$$

par conséquent, l'on aura, entre les angles α et $\mathcal{C}$, la relation

$$(7) \ldots\ldots \quad \text{dig.}(c, \alpha) = \frac{1+c_{,}}{2} \text{ dig.}(c_{,}, \mathcal{C}),$$

dont la traduction algébrique est

$$\text{tang.}\,\mathcal{C} = \frac{(1+b)\text{ tang.}\,\alpha}{1-b\text{ tang.}^2\alpha};$$

ce qui donne, en mettant au lieu de tang. α et de tang. $\mathcal{C}$ leurs valeurs $\sqrt{-1}$ sin. λ et $\sqrt{-1}$ sin. μ,

$$\sin.\,\mu = \frac{(1+b)\sin.\,\lambda}{1+b\sin.^2\lambda}.$$

Mais on a aussi (§ 25)

$$\text{dig.}(c, \alpha) = \sqrt{-1}\text{ dig.}(b, \lambda),$$
$$\text{dig.}(c_{,}, \mathcal{C}) = \sqrt{-1}\text{ dig.}(b_{,}, \mu) :$$

il vient donc, en remplaçant ces quantités par leurs valeurs dans l'équation (7),

$$\text{dig.}(b, \lambda) = \frac{1+c_{,}}{2} \text{ dig.}(b_{,}, \mu).$$

En comparant cette équation à celle qui lie dig. (c, φ) à dig. $(c_{,}, \varphi_{,})$, on a la proportion

$$\text{dig.}(b, \lambda) : \text{dig.}(b_{,}, \mu) :: \text{dig.}(c, \varphi) : \text{dig.}(c_{,}, \varphi_{,});$$

par où l'on voit qu'il serait très-aisé de conclure l'angle μ des angles λ, φ, et $\varphi_{,}$, à l'aide des tables de digamma.

On peut observer que les modules complémentaires remplacent, en partie, les modules primitifs, dans ce qui concerne les kappa circulaires. Cette remarque, jointe à celle que nous avons déjà faite au § 59, semble indiquer que ces transcendantes sont réellement d'une nature plus composée que les kappa logarithmiques. On trouvera au chapitre XIII, une nouvelle confirmation de cette conjecture.

Remarquons aussi qu'il résulte de l'équation (1), que si le paramètre de la fonction proposée $H(n, c, \varphi)$, est de la forme $n = -1 + b^2 \sin.^2\theta$, celui de la transformée $H(n_{,}, c_{,}, \varphi_{,})$ est positif.

§ 106. La transition des kappa logarithmiques à la fonction upsilon, est trop naturelle pour que nous ne cherchions pas à vérifier, si la double méthode des modules ne s'appliquerait pas avec succès au calcul de cette transcendante. D'abord, en faisant $A = 1$, $B = c^2 \sin.^2\theta$, $n = -c^2 \sin.^2\theta$, la formule (a') du § 101, devient

$$\text{kal.}(\theta, c, \varphi) = \Sigma A_{(\mu)} \varkappa$$

$$-\frac{1}{4}\frac{c \sin.^2\theta}{\Delta^2(c,\theta)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{c_{,}}} \cdot \dfrac{1}{\sin.\theta_{,}} \log.\left(\dfrac{1 + c_{,} \sin.\theta_{,} \sin.\varphi_{,}}{1 - c_{,} \sin.\theta_{,} \sin.\varphi_{,}}\right) \\ + \dfrac{1}{\sqrt{c_{,} c_{,,}}} \cdot \dfrac{\frac{1}{2}\cos.\lambda_{,}}{\sin.\theta_{,,}} \log.\left(\dfrac{1 + c_{,,} \sin.\theta_{,,} \sin.\varphi_{,,}}{1 - c_{,,} \sin.\theta_{,,} \sin.\varphi_{,,}}\right) \\ + \dfrac{1}{\sqrt{c_{,} c_{,,} c_{,,,}}} \cdot \dfrac{\frac{1}{4}\cos.\lambda_{,} \cos.\lambda_{,,}}{\sin.\theta_{,,,}} \log.\left(\dfrac{1 + c_{,,,} \sin.\theta_{,,,} \sin.\varphi_{,,,}}{1 - c_{,,,} \sin.\theta_{,,,} \sin.\varphi_{,,,}}\right) \\ + \text{etc.} : \end{array} \right.$$

$A_{(\mu)}$ représentant la série

$$A_{(\mu)} = 1 + \frac{\frac{1}{2} c^2 \sin.^2\theta}{\Delta^2(c,\theta)} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{1}{2}\cos.\lambda_{,} + \dfrac{1}{4}\cos.\lambda_{,} \cos.\lambda_{,,} + \ldots\ldots \\ \ldots + \dfrac{1}{2^{\mu-1}} \cos.\lambda_{,} \cos.\lambda_{,,} \cos.\lambda_{,,,} \ldots \cos.\lambda_{(\mu-1)} \end{array} \right\},$$

et les angles $\lambda_{,}$, $\lambda_{,,}$, etc., étant donnés par la formule générale

$$\cos.\lambda_{(\mu)} = \frac{c_{(\mu)}\cos.\theta_{(\mu)}}{\Delta_{(\mu)}(\theta)},$$

dans laquelle $\Delta_{(\mu)}(\theta)$ désigne, par abréviation, le radical $\Delta(c_{(\mu)}, \theta_{(\mu)})$.

Nous avons déjà remarqué que $\theta_{,}$ se déduit de θ suivant la même loi que $\varphi_{,}$ se déduit de φ; d'où il suit, que si $\theta = \varphi$, on a aussi $\theta_{,} = \varphi_{,}$, $\theta_{,,} = \varphi_{,,}$, etc. Or, d'après l'expression de $\Upsilon(\varphi)$ donnée au § 67, il vient, en écrivant φ au lieu de θ dans la valeur précédente de kal.(θ, c, φ), dans celle du coefficient général $\cos.\lambda_{(\mu)}$, et dans celle de $A_{(\mu)}$,

$$\Upsilon(\varphi) = \frac{1}{2}\text{dig.}\varphi\,[\text{eps.}\varphi + \cot.\varphi.\Delta(\varphi)]$$

$$-\frac{1}{4}\log.(1 - c^2\sin.^4\varphi) - \frac{1}{2}\cot.\varphi\,\Delta(\varphi).\ \Sigma A_{(\mu)}x$$

$$+\frac{1}{8}c\frac{\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{c_{,}}}\cdot\dfrac{1}{\sin.\varphi_{,}}\log.\left(\dfrac{1+c_{,}\sin.^2\varphi_{,}}{1-c_{,}\sin.^2\varphi_{,}}\right)\\ +\dfrac{1}{\sqrt{c_{,}c_{,,}}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c_{,}\cos.\varphi_{,}}{\Delta_{,}}\cdot\dfrac{1}{\sin.\varphi_{,,}}\log.\left(\dfrac{1+c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,}}{1-c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,}}\right)\\ +\dfrac{1}{\sqrt{c_{,}c_{,,}c_{,,,}}}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{c_{,}\cos.\varphi_{,}}{\Delta_{,}}\cdot\dfrac{c_{,,}\cos.\varphi_{,,}}{\Delta_{,,}}\cdot\dfrac{1}{\sin.\varphi_{,,,}}\log.\left(\dfrac{1+c_{,,,}\sin.^2\varphi_{,,,}}{1-c_{,,,}\sin.^2\varphi_{,,,}}\right)\\ +\text{etc.},\end{array}\right.$$

$$A_{(\mu)} = 1 + \frac{\frac{1}{2}c^2\sin.^2\varphi}{\Delta^2}\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{c_{,}\cos.\varphi_{,}}{\Delta_{,}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{c_{,}c_{,,}\cos.\varphi_{,}\cos.\varphi_{,,}}{\Delta_{,}\Delta_{,,}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}\cdot\frac{c_{,}c_{,,}c_{,,,}\cos.\varphi_{,}\cos.\varphi_{,,}\cos.\varphi_{,,,}}{\Delta_{,}\Delta_{,,}\Delta_{,,,}} + \text{etc.}\right\}.$$

Mais, d'après le § 80,

$$\sin.\varphi_{,} = \frac{c}{\sqrt{c_{,}}}\cdot\frac{\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta},$$

$$\sin.\varphi_{,,} = \frac{c_{,}}{\sqrt{c_{,,}}}\cdot\frac{\sin.\varphi_{,}\cos.\varphi_{,}}{\Delta_{,}},$$

etc.;

d'où

$$\frac{c_{,}\cos.\varphi_{,}}{\Delta_{,}} = \frac{\sqrt{c_{,,}}\sin.\varphi_{,,}}{\sin.\varphi_{,}},$$

$$\frac{c_{,,}\cos.\varphi_{,,}}{\Delta_{,,}} = \frac{\sqrt{c_{,,,}}\sin.\varphi_{,,,}}{\sin.\varphi_{,,}},$$

etc. :

substituant toutes ces quantités dans les deux formules précédentes, elles deviennent

$$8\Upsilon(\varphi) = 4\,\text{dig.}\,\varphi[\text{eps.}\,\varphi + \cot.\,\varphi\Delta(\varphi)]$$
$$-2\log.(1-c^2\sin.^4\varphi) - 4\cot.\varphi\,.\,\Delta(\varphi)\,.\,\Sigma A_{(\mu)}x$$
$$+\log.\left(\frac{1+c_{,}\sin.^2\varphi_{,}}{1-c_{,}\sin.^2\varphi_{,}}\right)+\tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{1+c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,}}{1-c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,}}\right)+\tfrac{1}{4}\log.\left(\frac{1+c_{,,,}\sin.^2\varphi_{,,,}}{1-c_{,,,}\sin.^2\varphi_{,,,}}\right)+\text{etc.},$$

$$A_{(\mu)} = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{c_{,}}\sin.\varphi_{,}}{\cos.^2\varphi}\left\{\sqrt{c_{,}}\sin.\varphi_{,}+\frac{1}{2}\sqrt{c_{,}c_{,,}}\sin.\varphi_{,,}+\frac{1}{4}\sqrt{c_{,}c_{,,}c_{,,,}}\sin.\varphi_{,,,}\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{1}{2^{\mu-1}}\sqrt{c_{,}c_{,,}c_{,,,}\ldots c_{(\mu)}}\sin.\varphi_{(\mu)}\right\}.$$

Pour sommer la série du second membre de la dernière équation, nous remarquerons que, d'après le § 97,

$$\frac{\text{eps.}\,\varphi}{c} = \frac{\Sigma Mx}{c} + \frac{\sqrt{c_{,}}\sin.\varphi_{,}}{2} + \frac{\sqrt{c_{,}c_{,,}}\sin.\varphi_{,,}}{4} + \text{etc.};$$

d'où

$$A_{(\mu)} = 1+\frac{\sqrt{c_{,}}}{c}\cdot\frac{\sin.\varphi_{,}}{\cos.^2\varphi}(\text{eps.}\,\varphi-\Sigma Mx) = 1+\frac{1}{\Delta\cot.\varphi}(\text{eps.}\,\varphi-\Sigma Mx).$$

Mais l'on a les relations

$$\text{dig.}\,\varphi = \Sigma x,\ E = \Sigma M\frac{\pi}{2},\ D = \Sigma\frac{\pi}{2}:$$

donc

$$A_{(\mu)} = 1+\frac{1}{\Delta\cot.\varphi}\left(\text{eps.}\,\varphi-\frac{E}{D}\,\text{dig.}\,\varphi\right),$$

et la valeur de $8\Upsilon(\varphi)$ se réduit à

$$8\Upsilon(\varphi) = \frac{4E}{D}\,\text{dig.}^2\varphi - 2\log.\left(1 - c^2 \sin.^4\varphi\right)$$
$$+ \log.\left(\frac{1 + c_{,} \sin.^2\varphi_{,}}{1 - c_{,} \sin.^2\varphi_{,}}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{1 + c_{,,} \sin.^2\varphi_{,,}}{1 - c_{,,} \sin.^2\varphi_{,,}}\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\mu-2}\log.\left(\frac{1 + c_{(\mu-1)} \sin.^2\varphi_{(\mu-1)}}{1 - c_{(\mu-1)} \sin.^2\varphi_{(\mu-1)}}\right);$$

d'où l'on tire, en faisant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$,

$$\Upsilon\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}DE - \tfrac{1}{2}\log.b,$$

comme au § 65.

§ 107. La série précédente se simplifie extrêmement au moyen des relations

$$\sin.\varphi_{,} = (1+b)\frac{\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta}, \quad (1+b)^2 = \frac{c^2}{c_{,}};$$

d'où l'on déduit

$$\log.(1 + c\sin.^2\varphi) + \log.(1 - c\sin.^2\varphi) = \log.(1 + c_{,}\sin.^2\varphi_{,}) - 2\log.\left(\frac{1}{\Delta}\right).$$

En effet, en écrivant $\Upsilon(\varphi)$ sous la forme

$$\Upsilon(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{E}{D}\,\text{dig.}^2\varphi - \frac{1}{4}\left[\log.(1 + c\sin.^2\varphi) + \log.(1 - c\sin.^2\varphi)\right]$$
$$+ \frac{1}{8}\log.(1 + c_{,}\sin.^2\varphi_{,}) - \frac{1}{8}\log.(1 - c_{,}\sin.^2\varphi_{,})$$
$$+ \frac{1}{16}\log.(1 + c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,}) - \frac{1}{16}\log.(1 - c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,})$$
$$+ \text{etc.},$$

on obtient

$$\Upsilon(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{E}{D}\,\text{dig.}^2\varphi + \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1}{\Delta}\right)$$

$$- \frac{1}{8}\left[\log.(1+c_{,}\sin.^2\varphi_{,}) + \log.(1-c_{,}\sin.^2\varphi_{,})\right]$$

$$- \frac{1}{16}\log.(1+c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,}) - \frac{1}{16}\log.(1-c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,})$$

$$- \text{etc.};$$

ce qui donne, par des substitutions successives,

$$(b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Upsilon(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{E}{D}\,\text{dig.}^2\varphi$$

$$-\left(\frac{1}{2}\log.\Delta + \frac{1}{4}\log.\Delta_{,} + \frac{1}{8}\log.\Delta_{,,} + \text{etc.}\right).$$

§ 108. Pour appliquer aux upsilon la méthode des modules croissants, nous prendrons la valeur de eps. φ trouvée au § 97, qui est

$$\text{eps.}\,\varphi = \Sigma'M'\log.\text{tang.}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^{(\mu)}\right) + c\Psi(\mu).$$

Cette équation, combinée avec les suivantes

$$\text{dig.}\,\varphi = \Sigma'\log.\text{tang.}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^{(\mu)}\right) \quad (\S\ 86),$$

$$M' = \frac{E}{D} - \frac{1}{D\Sigma'} \quad (\S\ 97),$$

devient

$$\text{eps.}\,\varphi = \text{dig.}\,\varphi.\,\frac{E\Sigma'-1}{D\Sigma'} + c\Psi(\mu):$$

multipliant les deux membres par $\frac{d\varphi}{\Delta}$ et intégrant, on a

$$\Upsilon(\varphi) = \tfrac{1}{2}\,\text{dig.}^2\varphi.\,\frac{E\Sigma'-1}{D\Sigma'} + c\int\Psi(\mu)\,\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Dans le développement de $\Psi(\mu)$, que nous avons donné en série convergente au § 95, on a une suite de termes de la forme C sin. $\varphi^{(n)}$,

dont chacun devra être multiplié par

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{c'}{\sqrt{c}} \cdot \frac{c''}{\sqrt{c'}} \cdot \frac{c'''}{\sqrt{c''}} \cdots \frac{c^{(n)}}{\sqrt{c^{(n-1)}}} \cdot \frac{d\varphi^{(n)}}{\Delta^{(n)}}$$

$$= \frac{c^{(n)}}{c} \sqrt{cc'c'' \ldots c^{(n-1)}} \cdot \frac{d\varphi^{(n)}}{\Delta^{(n)}},$$

puis intégré; mais l'on trouve sans difficulté

$$(8) \ldots \int \frac{\sin.\varphi^{(n)}\, d\varphi^{(n)}}{\Delta^{(n)}} = \frac{1}{c^{(n)}} \log. \left(\frac{1 + c^{(n)}}{c^{(n)} \cos.\varphi^{(n)} + \Delta^{(n)}} \right)$$

$$= \frac{1}{c^{(n)}} \log. \left(\frac{1}{\Delta^{(n+1)}} \right) (\S\, 78),$$

et l'on tombe ainsi sur la série convergente

$$(b') \ldots \ldots \left\{ \begin{aligned} \Upsilon(\varphi) = {} & \tfrac{1}{2} \operatorname{dig.}^2\varphi \, \frac{E\Sigma' - 1}{D\Sigma'} + c \log. \frac{1}{\Delta'} \\ & + 2 \left(c' \log. \frac{1}{\Delta''} - \frac{\sqrt{c}}{c'} \log. \frac{1}{\Delta'} \right) \\ & + 4 \left(c'' \log. \frac{1}{\Delta'''} - \frac{\sqrt{c'}}{c''} \log. \frac{1}{\Delta''} \right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + 2^{\mu} \left(c^{(\mu)} \log. \frac{1}{\Delta^{(\mu+1)}} - \frac{\sqrt{c^{(\mu-1)}}}{c^{(\mu)}} \log. \frac{1}{\Delta^{(\mu)}} \right). \end{aligned} \right.$$

Remarque. En multipliant par $\frac{d\varphi}{\Delta}$ tous les termes de l'équation (a) du § 92, et en profitant de l'intégrale (8), on parvient immédiatement à la formule (b), déduite de la considération des kappa logarithmiques ; ce qui offre une vérification très-satisfaisante des diverses formules qui nous ont conduit à ce résultat.

CHAPITRE XII.

Théorème de M. Jacobi.

§ 109. L'échelle de modules dont nous avons traité jusqu'à présent, a été découverte par Lagrange en 1784. La loi de sa formation est très-simple ; mais cette loi peut varier, et, par conséquent, il peut exister différentes échelles de modules. Longtemps après Lagrange (en 1825), Legendre en découvrit une seconde, dont la loi est plus compliquée, mais qui jouit de propriétés analogues (*). Enfin, peu de temps après, M. Jacobi a démontré qu'on peut former une infinité d'échelles de modules, à chacune desquelles correspond, par conséquent, une infinité de transformations diverses du même digamma, en d'autres fonctions de même espèce, dont les modules et les amplitudes sont tous déterminables par des opérations algébriques.

Le théorème de M. Jacobi peut s'énoncer de la manière suivante :

« Soit p un nombre impair pris à volonté, que j'appellerai l'*indice :*

» Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_{p-1}$ une série d'amplitudes qui correspondent » aux équations transcendantes

$$\text{dig.}(c, \alpha_1) = \frac{1}{p}\text{D}(c), \quad \text{dig.}(c, \alpha_2) = \frac{2}{p}\text{D}(c),$$

$$\text{dig.}(c, \alpha_3) = \frac{3}{p}\text{D}(c) \ldots\ldots \text{dig.}(c, \alpha_{p-1}) = \frac{p-1}{p}\text{D}(c) :$$

» Soit

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \mu \, \text{dig.}(k, \psi),$$

» une équation transcendante hypothétique, dans laquelle l'ampli-

(*) *Traité des fonctions elliptiques*, tome I, chap. XXXI.

» tude φ peut avoir une valeur quelconque, depuis zéro jusqu'à » l'infini :

» Je dis que le module secondaire $k_{\prime}$ le coefficient μ, que j'appel- » lerai le *régulateur*, et l'amplitude ψ, pourront toujours être déter- » minés en fonction du module donné c, du nombre donné p, et » de l'amplitude donnée φ. La relation entre φ et ψ sera

$$(A) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1 - \sin.\psi =$$

$$(1 \mp \sin.\varphi)\frac{\left(1 \pm \frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2}{1 - c^2\sin.^2\varphi\sin^2\alpha_2}\,\frac{\left(1 \mp \frac{\sin.\varphi}{\sin\alpha_{p-4}}\right)^2}{1 - c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_4}\cdots\frac{\left(1 - \frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_1}\right)^2}{1 - c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_{p-1}},$$

» dans laquelle on prendra les signes supérieurs ou inférieurs, selon » que p sera de la forme $4n + 1$ ou $4n - 1$. »

La démonstration de cette belle propriété des fonctions elliptiques de la première espèce (*), a reçu le dernier degré de rigueur, dans les suppléments dont Legendre a fait suivre la publication de son traité. Mais celle qui nous a paru mériter la préférence, sous le double rapport de la méthode et de la clarté, a été donnée par le célèbre Poisson, dans un rapport sur l'ouvrage de M. Jacobi (**). Elle se divise en trois parties, que nous allons exposer successivement, avec les modifications et les développements que nous avons crus nécessaires.

I.

§ 110. Considérons la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - ax)(1 - a'x)(1 - a''x)(1 - a'''x)}},$$

dans laquelle a, a', a'', a''', sont des constantes données, et proposons-nous d'y ramener une autre différentielle de la même forme, savoir :

$$\frac{\mu dy}{\sqrt{(1 - by)(1 - b'y)(1 - b''y)(1 - b'''y)}},$$

(*) Legendre a prouvé qu'elle se vérifie d'une manière analogue pour les fonctions de seconde espèce (*Traité des fonctions elliptiques*, tome III, page 59).

(**) Lu à l'académie des sciences, le 21 décembre 1829. (*Mémoires de l'Institut*, tome X).

en prenant pour y une fonction rationnelle de x, et en déterminant convenablement μ, b, b', b'', b''', en fonctions de a, a', a'', a'''. On suppose ces quatre constantes inégales, ainsi que b, b', b'', b'''; de de manière que ces différentielles ne sont point intégrables sous forme finie.

Désignons par U et V deux fonctions rationnelles et entières de x, premières entre elles, l'une du degré p, l'autre du degré $p-1$. Pour que leur rapport $y=\frac{U}{V}$ soit une intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-ax)(1-a'x)(1-a''x)(1-a'''x)}}=\frac{\mu dy}{\sqrt{(1-by)(1-b'y)(1-b''y)(1-b'''y)}},$$

il faudra qu'en substituant à y sa valeur $\frac{U}{V}$, dans l'équation précédente, le résultat

$$(1).\ \ldots\ldots (V-bU)(V-b'U)(V-b''U)(V-b'''U)=$$
$$\mu^2(1-ax)(1-a'x)(1-a''x)(1-a'''x)\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right)^2$$

soit identiquement vrai.

Lorsque les polynomes U et V renferment un grand nombre de termes, la substitution dont il s'agit devient excessivement laborieuse, quelquefois même impraticable. C'est pourquoi nous allons chercher à remplacer la condition exprimée par l'équation (1), par une autre plus aisée à vérifier.

Lemme. *Soit* T *un troisième polynome en* x : *si la valeur* $y=\frac{U}{V}$ *rend identique l'équation*

$$(2)\ \ldots\ldots (V-bU)(V-b'U)(V-b''U)(V-b'''U)=$$
$$(1-ax)(1-a'x)(1-a''x)(1-a'''x)T^2,$$

je dis qu'on aura nécessairement

$$T=\lambda\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right),$$

λ *étant une constante;* d'où il suit que, si λ était précisément égal à μ, les équations (1) et (2) seraient les mêmes, et que, par conséquent, la valeur $y=\frac{U}{V}$ rendrait identique l'équation (1); condition qui équivaut, comme nous l'avons vu, à la vérification de l'équation différentielle proposée.

Pour démontrer le lemme précédent, je fais observer :

1° Que les deux polynomes U et V étant premiers entre eux, et les coefficients b, b', b'', b''', inégaux, les polynomes $V-bU$, $V-b'U$, $V-b''U$, $V-b'''U$, sont aussi premiers entre eux ;

2° Que si les facteurs du premier degré en x du polynome T, sont représentés par X, X', X'', etc., ceux de T^2 sont X^2, X'^2, X''^2, etc., que j'appellerai *facteurs doubles* ;

3° Qu'il résulte de ce que les polynomes $V-bU$, $V-b'U$, etc., n'ont pas de facteurs communs, que les facteurs doubles de T^2 ne peuvent provenir de la multiplication de deux facteurs égaux contenus dans deux polynomes différents, et que, par conséquent, T^2 n'aura pas d'autres facteurs en x que les facteurs doubles d'un ou de plusieurs de ces quatre polynomes ;

4° Que, réciproquement, puisque les coefficients a, a', a'', a''', sont aussi inégaux, tous les facteurs doubles des quatre polynomes précités (facteurs que je désignerai par F^2, F'^2, F''^2, etc.) ne peuvent être compris que dans T^2 ; d'où il suit que T^2 doit être de la forme $T^2 = f(x).F^2.F'^2.F''^2.....$; mais en vertu de la remarque 3°, T^2 n'a pas d'autres facteurs en x que F^2, F'^2, F''^2, etc. : par conséquent, $f(x)$ se réduit à une constante, que je dénoterai par λ'^2 ; ce qui donnera

$$T = \lambda'.F.F'.F''.... ;$$

5° Que p étant le degré de U, le premier membre de l'équation (2) sera du degré $4p$. Ainsi T^2 doit être du degré $4p-4$, et, par conséquent, T du degré $2p-2$; de sorte que ce nombre $2p-2$ sera celui des facteurs F, F', F'', etc. ;

6° Qu'il suit de l'identité

$$(V-b^{(\mu)}U)\frac{dU}{dx}-U\frac{d(V-b^{(\mu)}U)}{dx}=V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx},$$

que tout facteur double de $V-b^{(\mu)}U$ est un facteur simple de $V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}$ (*). Par conséquent, ce polynome renfermera le produit

(*) En effet, $F^{(\mu)2}$ étant un des facteurs doubles du polynome $V-b^{(\mu)}U$, le polynome dérivé $\frac{d(V-b^{(\mu)}U)}{dx}$, et, par conséquent, le premier membre de l'identité précédente ne sera divisible que par la première puissance de $F^{(\mu)}$.

de tous les facteurs F, F′, F″, etc. ; ce que nous exprimerons en écrivant

$$V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx} = \varphi(x).F.F'.F''.....;$$

équation dans laquelle le second membre doit être *au moins* du degré $2p-2$, puisque, d'après la remarque précédente, ce nombre est celui des facteurs F, F′, F″, etc. Mais, puisque U est du degré p, et V du degré $p-1$, le premier membre est *précisément* du degré $2p-2$; d'où l'on conclut que $\varphi(x)$ est une constante.

En rapprochant l'équation $T = \lambda' F.F'.F''....$, de la précédente, on voit qu'elles coïncident, à un coefficient constant près ; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Dans l'application que nous voulons faire du lemme ci-dessus aux transcendantes elliptiques, il suffira de considérer l'équation différentielle

$$(3) \quad . \quad . \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \frac{\mu dy}{\sqrt{1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

dans laquelle c est une constante donnée, et μ et k sont des constantes inconnues : l'équation (2) sera alors remplacée par celle-ci

$$(4) \quad . \quad . \quad (V^2-U^2)(V^2-k^2U^2) = (1-x^2)(1-c^2x^2)T^2.$$

De plus, si nous faisons $x = \sin.\varphi$, $y = \sin.\psi$, l'équation (3) deviendra

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}} = \frac{\mu d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin.^2\psi}};$$

ce qui donne, en prenant les intégrales de ses deux membres, de manière qu'elles s'évanouissent avec les variables φ et ψ,

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \mu\,\text{dig.}(k, \psi).$$

II.

§ 111. Soit, en général,

$$\text{dig.}(c, \varphi) + \text{dig.}(c, \theta) = \text{dig.}(c, \sigma),$$
$$\text{dig.}(c, \varphi) - \text{dig.}(c, \theta) = \text{dig.}(c, \delta) :$$

d'après les formules du § 18, on aura

$$\sin.\sigma = \frac{\sin.\varphi \cos.\theta\, \Delta(c,\theta) + \sin.\theta \cos.\varphi\, \Delta(c,\varphi)}{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\theta},$$

$$\sin.\delta = \frac{\sin.\varphi \cos.\theta\, \Delta(c,\theta) - \sin.\theta \cos.\varphi\, \Delta(c,\varphi)}{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\theta};$$

d'où résultent les équations

$$\sin.\sigma + \sin.\delta = \frac{2\sin.\varphi \cos.\theta\, \Delta(c,\theta)}{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\theta},$$

$$\sin.\sigma \sin.\delta = \frac{\sin.^2\varphi - \sin.^2\theta}{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\theta}:$$

donc

$$(1 - \sin.\sigma)(1 - \sin.\delta) =$$

$$\frac{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\theta + \sin.^2\varphi - \sin.^2\theta - 2\sin.\varphi \cos.\theta\, \Delta(c,\theta)}{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\theta}.$$

Désignons par dig.(c, θ) et dig. (c, θ') deux digamma complémentaires : on aura sin. $\theta' = \frac{\cos.\theta}{\Delta(c,\theta)}$, et le produit précédent deviendra

$$(5). \ldots (1 - \sin.\sigma)(1 - \sin.\delta) = \frac{\cos.^2\theta \left(1 - \frac{\sin.\varphi}{\sin.\theta'}\right)^2}{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\theta}.$$

Prenons $\theta = \text{amp.}\frac{mD}{p}$: nous aurons $\theta' = \text{amp.}\frac{p-m}{p}D$; d'où il suit que, si l'on écrit α_m au lieu de θ, il faudra écrire α_{p-m} au lieu de θ'. Soit aussi dig. $(c, \varphi) = z$: on aura

$$\text{dig.}(c,\sigma) = z + \frac{mD}{p}, \quad \text{dig.}(c,\delta) = z - \frac{mD}{p},$$

et, par conséquent,

$$\sin.\sigma = \sin.\text{amp.}\left(z + \frac{mD}{p}\right), \quad \sin.\delta = \sin.\text{amp.}\left(z - \frac{mD}{p}\right).$$

Soit encore sin. $\varphi = x$, sin. $\psi = y$, et l'équation (5) pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{\left[1 - \sin.\text{amp.}\left(z + \frac{mD}{p}\right)\right]\left[1 - \sin.\text{amp.}\left(z - \frac{mD}{p}\right)\right]}{\cos.^2\alpha_m} = \frac{\left(1 - \frac{x}{\sin.\alpha_{p-m}}\right)^2}{1 - c^2x^2\sin.^2\alpha_m}.$$

De plus, si l'on se rappelle que le signe du sinus de l'amplitude, change avec celui de l'amplitude, et que ce dernier change avec le signe du digamma, on pourra mettre $-x$ et $-z$ à la place de x et de z, et l'on obtiendra cette double expression

$$\left[1\pm\sin.\text{amp.}\left(z+\frac{m\mathrm{D}}{p}\right)\right]\left[1\pm\sin.\text{amp.}\left(z-\frac{m\mathrm{D}}{p}\right)\right]=\frac{\left(1\pm\frac{x}{\sin.\alpha_{p-m}}\right)^2}{1-c^2x^2\sin.^2\alpha_m}.$$

§ 112. Considérons maintenant l'équation (A) du § 109, et écrivons-la, pour abréger, de la manière suivante

$$(6),\ 1-y=(1\mp x).\frac{\left(1\pm\frac{x}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2}{1-c^2x^2\sin.^2\alpha_2}.\frac{\left(1\mp\frac{x}{\sin.\alpha_{p-4}}\right)^2}{1-c^2x^2\sin.^2\alpha_4}\cdots\frac{\left(1-\frac{x}{\sin.\alpha_1}\right)^2}{1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1}}:$$

en vertu de la formule de transformation qui termine le § précédent, cette équation devient

$$(7)\ \ldots\ 1-y=\frac{(1\mp\sin.\text{amp.}z)\mathrm{P}}{\cos.^2\alpha_2\cos.^2\alpha_4\ldots\cos.^2\alpha_{p-1}},$$

P désignant le produit des $p-1$ facteurs

$$[1]\ .\ .\ 1\pm\sin.\text{amp.}\left(z-\frac{2}{p}\mathrm{D}\right),\quad [2]\ .\ .\ 1\pm\sin.\text{amp.}\left(z+\frac{2}{p}\mathrm{D}\right),$$

$$[3]\ .\ .\ 1\mp\sin.\text{amp.}\left(z-\frac{4}{p}\mathrm{D}\right),\quad [4]\ .\ .\ 1\mp\sin.\text{amp.}\left(z+\frac{4}{p}\mathrm{D}\right),$$

$$[5]\ .\ .\ 1\pm\sin.\text{amp.}\left(z-\frac{6}{p}\mathrm{D}\right),\quad [6]\ .\ .\ 1\pm\sin.\text{amp.}\left(z+\frac{6}{p}\mathrm{D}\right),$$

$$[7]\ .\ .\ 1\mp\sin.\text{amp.}\left(z-\frac{8}{p}\mathrm{D}\right),\quad [8]\ .\ .\ 1\mp\sin.\text{amp.}\left(z+\frac{8}{p}\mathrm{D}\right),$$

$$[9]\ .\ .\ 1\pm\sin.\text{amp.}\left(z-\frac{10}{p}\mathrm{D}\right),\quad [10]\ .\ .\ 1\pm\sin.\text{amp.}\left(z+\frac{10}{p}\mathrm{D}\right),$$

$$[11]\ .\ .\ 1\mp\sin.\text{amp.}\left(z-\frac{12}{p}\mathrm{D}\right),\quad [12]\ .\ .\ 1\mp\sin.\text{amp.}\left(z+\frac{12}{p}\mathrm{D}\right),$$

$$[13]\ .\ .\ 1\pm\sin.\text{amp.}\left(z-\frac{14}{p}\mathrm{D}\right),\quad [14]\ .\ .\ 1\pm\sin.\text{amp.}\left(z+\frac{14}{p}\mathrm{D}\right),$$

. . . . . .

$$[p-2]\ .\ 1-\sin.\text{amp.}\left(z-\frac{p-1}{p}\mathrm{D}\right),\quad [p-1]\ .\ 1-\sin.\text{amp.}\left(z+\frac{p-1}{p}\mathrm{D}\right),$$

qu'il s'agit de transformer de nouveau.

A cet effet, je décompose le produit P en trois autres P′, P″, P‴, tels que

P′ désigne le produit des facteurs notés par les numéros d'ordre [1], [2], [5], [6], [9], [10], [13], [14], etc.;

P″ le produit des facteurs [3], [7], [11], [15], etc.;

P‴ le produit des facteurs [4], [8], [12], [16], etc.

Cela posé, je ferai remarquer qu'en vertu du § 26, on a

$$\text{sin. amp.}(\zeta + 2D) = -\text{sin. amp.}\,\zeta,\quad \text{sin. amp.}(\zeta + 4D) = \text{sin. amp.}\,\zeta,$$

quel que soit ζ. D'après cette propriété, nous mettrons $z + 2D$ à la place de z, dans les facteurs de P′, et nous changerons les signes des sinus qu'ils contiennent; nous augmenterons z de 4D dans les facteurs de P″, et nous ne ferons éprouver aucun changement aux facteurs de P‴. On reconnaîtra pour lors :

Que les facteurs [1], [5], [9], [13], etc., forment une série

$$P^{iv} = \left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{2p-2}{p}D\right)\right]\left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{2p-6}{p}D\right)\right]\ldots;$$

Que les facteurs [2], [6], [10], [14], etc., forment une série

$$P^{v} = \left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{2p+2}{p}D\right)\right]\left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{2p+6}{p}D\right)\right]\ldots;$$

Que le produit $P^{iv}.P^{v}$ est égal à P′; d'où il suit que

$$P = P''.P'''.P^{iv}.P^{v}.$$

En multipliant P″ par P^{v}, et P‴ par P^{iv}, on décomposera P en deux séries S′ et S″, de chacune $\frac{p-1}{2}$ facteurs, savoir :

$$S' = \left\{\left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{4p-4}{p}D\right)\right]\left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{4p-8}{p}D\right)\right]\cdots\right\}$$
$$\times \left\{\left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{2p+2}{p}D\right)\right]\left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{2p+6}{p}D\right)\right]\cdots\right\},$$

$$S'' = \left\{\left[1 \mp \text{sin. amp.}\left(z + \frac{4}{p}D\right)\right]\left[1 \mp \text{sin. amp.}\left(z + \frac{8}{p}D\right)\right]\cdots\right\}$$
$$\times \left\{\left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{2p-2}{p}D\right)\right]\left[1 \mp \text{sin.amp.}\left(z + \frac{2p-6}{p}D\right)\right]\cdots\right\}.$$

On pourrait croire, au premier abord, que les deux premières lignes forment deux séries distinctes, ainsi que les deux dernières; mais il est aisé de s'assurer du contraire, en observant que l'on a

$$2p+2=4p-2(p-1),\quad 2p+6=4p-2(p-3),\ \text{etc.},$$
$$2p-2=2(p-1),\quad 2p-6=2(p-3),\ \text{etc.};$$

et comme tous les nombres $p-1$, $p-3$, $p-5$, etc., sont de la forme $2n$, tous les multiples de D, dans les quatre lignes, seront de la forme $\frac{4m}{p}$D.

§ 113. Il suit du paragraphe précédent, que la valeur de $1-y$, donnée par l'équation (7), peut s'exprimer par

$$(8)\ \ldots\ldots\ldots\ 1-y=$$
$$\frac{[1\mp\sin.\text{amp}.z]\left[1\mp\sin.\text{amp}.\left(z+\frac{4}{p}\text{D}\right)\right]\ldots\left[1\mp\sin.\text{amp}.\left(z+\frac{4p-4}{p}\text{D}\right)\right]}{\cos.\alpha_2\,.\,\cos.^2\alpha_4\,.\,\cos.^2\alpha_6\,\ldots\ldots\ldots\,\cos.^2\alpha_{p-1}}.$$

Cette formule nous montre que la quantité $1-y$ ne changera pas, si l'on met $z+\frac{4}{p}$D à la place de z; car alors, chaque facteur du numérateur se changera dans le suivant, et le dernier dans le premier. Il en résulte que $1-y$ ne changera pas non plus, en mettant $z+\frac{4m}{p}$D à la place de z, m étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Or, en faisant $z=0$ dans la première expression de P,

$$\text{P}=\left[1\pm\sin.\text{amp}.\left(z-\frac{2}{p}\text{D}\right)\right]\left[1\pm\sin.\text{amp}.\left(z+\frac{2}{p}\text{D}\right)\right]\ldots,$$

cette expression devient

$$\left[1\mp\sin.\text{amp}.\frac{2}{p}\text{D}\right]\left[1\pm\sin.\text{amp}.\frac{2}{p}\text{D}\right]\left[1\pm\sin.\text{amp}.\frac{4}{p}\text{D}\right]\left[1\mp\sin.\text{amp}.\frac{4}{p}\text{D}\right]\ldots,$$

ou

$$\cos.^2\text{amp}.\frac{2}{p}\text{D}.\cos.^2\text{amp}.\frac{4}{p}\text{D}.\cos.^2\text{amp}.\frac{6}{p}\text{D}\ldots.\cos.^2\text{amp}.\frac{p-1}{p}\text{D};$$

et comme on a généralement amp. $\frac{m}{p}$D $=\alpha_m$ (§ 111), la formule (7) donnera $y=0$ pour $z=0$, et aussi pour $z=\frac{4m}{p}$D.

Écrivons maintenant l'équation (6) sous la forme $1-y=\frac{Z}{V}$; d'où

$$y=\frac{V-Z}{V},$$

en prenant

$$V=(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_2)\ (1-c^2x^2\sin.^2\alpha_4)\ \ldots\ldots\ (1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1}),$$

et en désignant par Z une fonction rationnelle et entière de x, qui sera du degré p. La fonction V—Z sera nulle, ainsi que y, pour $z=\frac{4m}{p}D$, c'est-à-dire, quand on fera $x=\sin.\text{amp.}\frac{4m}{p}D$; d'où il résulte, que les racines de l'équation $V-Z=0$, seront

$$0,\ \pm\sin.\text{amp.}\frac{4}{p}D,\ \pm\sin.\text{amp.}\frac{8}{p}D,\ \ldots\ldots\ \pm\sin.\text{amp.}\frac{2p-2}{p}D,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$0,\ \pm\sin.\text{amp.}\frac{2}{p}D,\ \pm\sin.\text{amp.}\frac{4}{p}D,\ \ldots\ldots\ \pm\sin.\text{amp.}\frac{p-1}{p}D,$$

parce que

$$\pm\sin.\text{amp.}\frac{2p-2}{p}D=\pm\sin.\text{amp.}\left(2D-\frac{2}{p}D\right)$$
$$=\mp\sin.\text{amp.}\left(4D-\frac{2}{p}D\right)=\pm\sin.\text{amp.}\frac{2}{p}D.$$

Nous aurons donc pour facteurs de V—Z,

$$x,\ 1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_2},\ 1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_4},\ 1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_6},\ \ldots\ 1-\frac{x^2}{\sin.\alpha_{p-1}};$$

mais, puisque ces facteurs forment, par leur produit, un polynome du degré p, il suffira, pour reproduire la fonction V—Z, de joindre à ces facteurs variables un facteur constant. Nous ferons voir, à la fin de ce §, que ce facteur constant a pour valeur $\frac{1}{\mu}$, μ désignant la même quantité que dans l'équation (3), si cette équation a pour intégrale $y=\frac{V-Z}{V}$.

Il suit de ce qui précède, que si l'on prend

$$U=\frac{x}{\mu}\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_4}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right),$$

la valeur de y aura pour expression

$$(9).\ y=\frac{U}{V}=\frac{x}{\mu}\cdot\frac{\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_4}\right)}{(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_2)(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_4)}\cdots\frac{1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-1}}}{1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1}}.$$

Pour déterminer μ, j'observe qu'en faisant $x=\pm 1$, selon que $\frac{1}{2}(p-1)$ sera pair ou impair, l'équation (6) donnera $y=1$, dans les deux cas. Dans le premier, je fais à la fois $x=1$ et $y=1$ dans l'équation (9) : le nombre des facteurs binomes de son second membre étant $\frac{1}{2}(p-1)$, et par conséquent pair, il en résultera

$$\mu=\frac{\cot.^2\alpha_2.\cot.^2\alpha_4.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \cot.^2\alpha_{p-1}}{(1-c^2\sin.^2\alpha_2)(1-c^2\sin.^2\alpha_4).\ \ldots\ (1-c^2\sin.^2\alpha_{p-1})}.$$

Dans le second cas (celui où $\frac{1}{2}(p-1)$ est impair), on fera $y=1$, $x=-1$: le nombre des facteurs binomes du second membre de l'équation (9) étant impair, le produit de ces facteurs donnera un résultat négatif par la substitution de $-\cot.^2\alpha_m$ au lieu de $1-\frac{1}{\sin.^2\alpha_m}$. Le signe de ce produit se combinant avec celui de x, on tombera sur la même valeur de μ.

Les fonctions dig. $(c,\ \alpha_m)$, dig. $(c,\ \alpha_{p-m})$ étant complémentaires (§ 111), on a

$$(10).\ \ldots\ \sin.^2\alpha_{p-m}=\frac{\cos.^2\alpha_m}{1-c^2\sin.^2\alpha_m};$$

au moyen de quoi la valeur précédente de μ, devient plus simplement

$$(11).\ \ldots\ \mu=\frac{\sin.^2\alpha_1.\ \sin.^2\alpha_3\ \ldots\ldots\ \sin.^2\alpha_{p-2}}{\sin.^2\alpha_{p-1}.\ \sin^2\alpha_{p-3}.\ \ldots\ \sin.^2\alpha_2}.$$

Nous avons promis, tout à l'heure, de démontrer que le coefficient μ doit être le même dans les équations (9) et (3), pour que la première soit une intégrale de la seconde. A cet effet, nous ferons remarquer que l'équation (3) ayant pour intégrale transcendante dig. $(c,\ \varphi)=\mu$ dig. $(k,\ \psi)$, si l'on suppose φ et ψ infiniment petits, cette intégrale donne $d\varphi=\mu d\psi$; ce qui est aussi le résultat auquel on parvient, en faisant la même hypothèse dans l'équation (9). La première condition exigée pour l'accord des équations dont il s'agit,

est donc que le coefficient μ ait même valeur dans l'une et dans l'autre.

III.

§ 114. Pour s'assurer que l'équation (9) donne véritablement la valeur de y en fonction de x, il resterait à substituer cette valeur dans l'équation différentielle (3), et à prouver que les deux membres deviennent identiques, en déterminant convenablement le module k, qui reste encore inconnu. Mais le calcul qu'exige cette substitution, ne serait praticable que pour des valeurs assez petites du nombre p, telles que $p=3$, 5, 7, et il cesserait absolument de l'être, en laissant la formule dans son état de généralité. La difficulté qui se présente ici est d'une telle nature, qu'il ne resterait guère d'espoir de parvenir à la démonstration générale, si M. Jacobi n'eût trouvé un moyen aussi simple qu'ingénieux, d'éviter la substitution à faire dans l'équation différentielle, et d'y suppléer par une propriété particulière de cette équation, qui doit être commune aux intégrales qui la représentent. Cette propriété consiste dans la remarque aisée à vérifier, que si l'on substitue à la fois $\frac{1}{cx}$ à la place de x, et $\frac{1}{ky}$ à la place de y, l'équation différentielle sera satisfaite.

La détermination du module k, se déduit immédiatement de cette double substitution opérée dans l'intégrale hypothétique $y=\frac{U}{V}=\frac{x}{\mu}\cdot\frac{W}{V}$ (*). En effet, si l'on écrit $\frac{1}{cx}$ à la place de x dans le facteur général

$$\Pi(m)=\frac{1-\dfrac{x^2}{\sin.^2\alpha_m}}{1-c^2x^2\sin.^2\alpha_m},$$

qui sert à composer la valeur de $\frac{W}{V}$ dans l'équation (9), ce facteur devient

$$\frac{1}{c^2\sin.^4\alpha_m}\cdot\frac{1-c^2x^2\sin.^2\alpha_m}{1-\dfrac{x^2}{\sin.^2\alpha_m}}:$$

(*) W, comme on le voit, désigne le facteur pair qui multiplie $\frac{x}{\mu V}$.

donc, la quantité $\frac{W}{V}$, formée du produit de plusieurs facteurs semblablement exprimés, deviendra $\frac{1}{A} \cdot \frac{V}{W}$, en faisant, pour abréger,

$$A = c^{p-1} \sin.^4\alpha_2 \sin.^4\alpha_4 \sin.^4\alpha_6 \ldots\ldots \sin.^4\alpha_{p-1},$$

et à la place de l'équation

$$y = \frac{x}{\mu} \cdot \frac{W}{V},$$

on aura

$$y = \frac{\mu^2 cA}{k} \cdot \frac{x}{\mu} \cdot \frac{W}{V}.$$

Or, il est visible que ces deux équations s'accorderaient entre elles, si l'on avait $k = \mu^2 cA$; c'est-à-dire, en substituant la valeur de μ,

(12). . . $k = c^p \sin.^4\alpha_1 \sin.^4\alpha_3 \sin.^4\alpha_5 \ldots\ldots \sin.^4\alpha_{p-2}$:

il est donc démontré, que la double substitution de $\frac{1}{cx}$ à la place de x, et de $\frac{1}{ky}$ à la place de y, qui peut se faire, sans donner à k aucune valeur dans l'équation (3), pourra se faire aussi dans l'équation finie $y = \frac{U}{V}$, pourvu qu'on donne à k la valeur qu'on vient d'assigner.

Enfin, c'est en combinant le principe de la double substitution avec le lemme du § 110, que nous allons éluder la vérification de l'équation différentielle (3).

Il résulte de l'équation (9), que y change de signe avec x : si donc, on met $-x$ et $-y$ à la place de x et de y dans l'équation (6), on aura la valeur de $1+y$; et, en la multipliant par celle de $1-y$, et prenant la racine carrée du produit, on en conclura

(13) . . . . . $\sqrt{1-y^2} =$

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-4}}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_1}\right)}{(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_2)(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_4)\ldots(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1})}.$$

J'effectue maintenant la double substitution de $\frac{1}{cx}$ et $\frac{1}{ky}$, au lieu de x et de y, dans cette équation : en divisant ses deux membres par $\sqrt{-1}$, il vient

$$\frac{1}{ky}\sqrt{1-k^2y^2} = \frac{1}{cx}\sqrt{1-c^2x^2} \cdot \frac{(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-2})(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-4})\ldots}{\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_4}\right)\ldots\ldots},$$

où l'on a dénoté par $\mathcal{C}$ le produit

$$c^p \sin.^2\alpha_1 \sin.^2\alpha_3 \ldots\ldots \sin.^2\alpha_{p-2} . \sin.^2\alpha_2 \sin.^2\alpha_4 \ldots\ldots \sin.^2\alpha_{p-1}.$$

Ayant multiplié l'équation précédente par ky, je substitue dans son second membre, la valeur de y donnée par l'équation (9) : en tenant compte des valeurs de μ, de k, et de $\mathcal{C}$, j'obtiens

$$(14) \ldots\ldots\ldots \sqrt{1-k^2y^2} =$$

$$\sqrt{1-c^2x^2} . \frac{(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-2})(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-4})\ldots(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_1)}{(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1})(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-3})\ldots(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_2)}.$$

Au moyen des formules (13) et (14), nous aurons

$$\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} = \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)} \times \frac{QQ'}{V^2},$$

en posant, pour abréger,

$$Q = \left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_3}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right),$$

$$Q' = (1-c^2x^2\sin.^2\alpha_1)(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_3)\ldots\ldots(1-c^2x^2\sin.^2\alpha_{p-2}),$$

et prenant pour V la même valeur que précédemment. Si donc, on met $\frac{U}{V}$ à la place de y, on aura l'équation

$$(V^2-U^2)(V^2-k^2U^2) = (1-x^2)(1-c^2x^2)Q^2Q'^2.$$

Or, il résulte de la première partie de la démonstration :

1° Que si l'on prend QQ′ pour T dans l'équation (4), QQ′ sera égal à $\lambda\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right)$ (§ 110) ;

2° Que si λ se trouvait être égal à μ, l'équation différentielle (3) serait vérifiée.

Il ne reste donc plus qu'à déterminer λ : à cet effet, je remarque d'abord que l'on a

$$T = \lambda\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right) = \frac{\lambda V^2}{dx} d . \left(\frac{U}{V}\right) = \lambda V^2 \frac{dy}{dx};$$

d'où

$$QQ' = \lambda V^2 \frac{dy}{dx};$$

mais si l'on suppose x et y infiniment petits dans les polynomes Q, Q', V, et dans l'équation (9), la relation ci-dessus se réduit à $1 = \frac{\lambda}{\mu}$: donc $\lambda = \mu$.

Remarques. L'usage du théorème de M. Jacobi, suppose la détermination préalable des quantités α_m, qui satisfont à l'équation $\text{dig.}(c, \alpha_m) = \frac{m}{p} D(c)$. Ces auxiliaires étant déterminées par les formules du § 21, on connaîtra les constantes μ et k par les formules (11) et (12), et l'amplitude ψ pourra être calculée par la formule trigonométrique (A).

L'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{\Delta(c, \varphi)} = \frac{\mu d\psi}{\Delta(k, \psi)}$$

ayant pour intégrale générale transcendante

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \mu[\text{dig.}(k, \psi) + \text{dig.}(k, \omega)],$$

ω désignant une constante arbitraire, on obtiendra l'intégrale générale algébrique de la même équation, en changeant sin. ψ en

$$\frac{\sin.\psi \cos.\omega \Delta(k, \omega) + \sin.\omega \cos.\psi \Delta(k, \psi)}{1 - k^2 \sin.^2\psi \sin.^2\omega},$$

dans le premier membre de la formule (A).

§ 115. Le théorème de M. Jacobi offre de nombreux corollaires, dont nous nous bornerons à rapporter les plus importants.

Corollaire Ier. Remarquons que dans la formule (A), on peut changer à la fois $+\sin.\psi$ et $+\sin.\varphi$, en $-\sin.\psi$ et $-\sin.\varphi$ (§ 114) : de plus, on a, en général,

$$\frac{1 \pm \sin.\psi}{1 \mp \sin.\psi} = \text{tang.}^2(45^\circ \pm \tfrac{1}{2}\psi),$$

$$\frac{\sin.p \pm \sin.q}{\sin.p \mp \sin.q} = \frac{\text{tang.}(\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}q)}{\text{tang.}(\frac{1}{2}p \mp \frac{1}{2}q)}.$$

Au moyen de ces relations, la formule (A) devient

$$\text{tang.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi) =$$

$$\text{tang.}(45^\circ \mp \tfrac{1}{2}\varphi) \cdot \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha_{p-2} \pm \varphi) \cdot \text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha_{p-4} \mp \varphi) \ldots \text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha_1 - \varphi)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha_{p-2} \mp \varphi) \cdot \text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha_{p-4} \pm \varphi) \ldots \text{tang.}\frac{1}{2}(\alpha_1 + \varphi)};$$

mais l'amplitude ψ peut se déduire de φ, par une formule encore plus élégante, que nous allons démontrer.

L'équation

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}=\frac{\mu d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin.^2\psi}},$$

comparée à l'équation (14), donne pour $d\psi$,

$$d\psi=\frac{d\varphi}{\mu}\cdot\frac{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_1}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_{p-1}}\cdots\frac{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_{p-2}}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_2}:$$

en égalant le second membre de cette équation à une suite de la forme

$$(15)\ \ldots\ldots\ d\psi=\frac{d\varphi}{\mu}\left(\mathrm{H}+\frac{\mathrm{H}'}{a'}+\frac{\mathrm{H}''}{a''}+\frac{\mathrm{H}'''}{a'''}\cdots\right),$$

dans laquelle a', a'', a''', etc., représentent les dénominateurs des fractions qui entrent dans l'expression de $d\psi$, on reconnaîtra d'abord, en faisant sin.φ égal à l'infini, que le terme H a pour valeur

$$\mathrm{H}=\frac{\sin.^2\alpha_1\sin.^2\alpha_3\ \ldots\ \sin.^2\alpha_{p-2}}{\sin.^2\alpha_2\sin.^2\alpha_4\ \ldots\ \sin.^2\alpha_{p-1}},$$

c'est-à-dire qu'il est précisément égal à μ. Ensuite, les autres termes auront, pour expression commune,

$$\frac{\mathrm{M}}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_m},$$

m ayant successivement toutes les valeurs 2, 4, 6..... $p-1$, et M désignant un coefficient général indépendant de φ.

La première idée qui se présente pour déterminer les coefficients H', H'', H''', etc., c'est de commencer par faire disparaître les dénominateurs a', a'', a''', etc., des fractions partielles, puis d'égaler le numérateur de la fraction ainsi obtenue, à celui de la fraction proposée; ce qui donnerait $\frac{p-1}{2}$ équations renfermant les $\frac{p-1}{2}$ inconnues représentées par le coefficient général M. Mais il est évident que ce procédé, très-laborieux si p n'est pas un petit nombre, est complétement en défaut quand la valeur numérique de p n'est pas donnée. Nous serons donc obligé d'employer une autre méthode.

Si nous représentons par $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, le polynome que nous voulons décomposer; et par $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}$, l'ensemble des termes autres que le terme géné-

ral que l'on considère, nous aurons l'identité

$$\frac{P}{Q} = \frac{M}{1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\alpha_m} + \frac{N}{R};$$

d'où

$$RM + N(1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\alpha_m) = P.$$

Cette équation devant se vérifier, quelle que soit la valeur du facteur $1 - c^2 \sin.^2\varphi \sin.^2\alpha_m$, aura également lieu si $1 - c^2 \sin^2\varphi \sin.^2\alpha_m = 0$, c'est-à-dire si $c^2 \sin.^2\varphi = \frac{1}{\sin.^2\alpha_m}$. Représentant par [R] et par [P] ce que deviennent R et P dans cette hypothèse, il viendra

$$M = \frac{[P]}{[R]};$$

ce qui donne, après avoir substitué à $c^2 \sin.^2\varphi$ sa valeur $\frac{1}{\sin.^2\alpha_m}$,

$$M = \frac{\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_1}{\sin.^2\alpha_m}\right)\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_3}{\sin.^2\alpha_m}\right) \cdots\cdots \left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_{p-2}}{\sin.^2\alpha_m}\right)}{\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_2}{\sin.^2\alpha_m}\right)\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_4}{\sin.^2\alpha_m}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_{m-2}}{\sin.^2\alpha_m}\right)\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_{m+2}}{\sin.^2\alpha_m}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_{p-1}}{\sin.^2\alpha_m}\right)},$$

ou, en tenant compte de la valeur de μ,

$$\frac{M}{\mu} = \frac{\left(\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_1} - 1\right)\left(\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_3} - 1\right) \cdots\cdots \left(\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{p-2}} - 1\right)}{\left(\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_2} - 1\right)\left(\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_4} - 1\right)\cdots\left(\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{m-2}} - 1\right)\left(\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{m+2}} - 1\right)\cdots\left(\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{p-1}} - 1\right)}.$$

Je fais observer que le nombre des facteurs du numérateur du second membre, étant désigné par n, celui des facteurs du dénominateur sera $n-1$, et que l'un de ces deux nombres sera nécessairement impair; d'où il suit que si l'on intervertit l'ordre des termes dans chaque facteur binome, tant du numérateur que du dénominateur, la fraction changera de signe, et l'on aura

$$\frac{M}{\mu} = -\frac{\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_1}\right) \cdots\cdots \left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right)}{\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{m-2}}\right)\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{m+2}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right)};$$

mais, comme la valeur de M, donnée par cette équation, est fort compliquée, nous allons chercher à la transformer en une autre plus simple.

Il suit du § 114, que si l'on remplace y par sa valeur $\frac{x}{\mu}\cdot\frac{W}{V}$, on a

$$QQ' = \mu V^2 \frac{dy}{dx} = VW + VWx\left(\frac{dW}{Wdx} - \frac{dV}{Vdx}\right);$$

d'où

$$\frac{QQ'}{VW} = 1 + x\left(\frac{dW}{Wdx} - \frac{dV}{Vdx}\right).$$

Les polynomes V, W, Q et Q' étant des fonctions paires de x, il conviendra de faire $x^2 = z$, et l'on aura l'équation

$$\frac{QQ' - VW}{2zVW} = \frac{dW}{Wdz} - \frac{dV}{Vdz}.$$

Représentons par $f = 1 - \frac{z}{\sin.^2 \alpha_m}$ un facteur quelconque de W, et soit

$$W = \left(1 - \frac{z}{\sin.^2 \alpha_m}\right) W' = fW',$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{QQ' - VW'f}{2zVW'} = \frac{df}{dz} + f\left(\frac{dW'}{W'dz} - \frac{dV}{Vdz}\right),$$

et devra être identiquement satisfaite pour une valeur quelconque de f. Or, si l'on suppose $f = 0$, d'où $z = \sin.^2 \alpha_m$, l'équation se réduit à

$$\frac{QQ'}{2zVW'} = \frac{df}{dz};$$

expression dans laquelle il faut encore substituer à z et à $\frac{df}{dz}$ les valeurs particulières qui résultent de l'hypothèse $f = 0$, c'est-à-dire $z = \sin.^2 \alpha_m$, et $\frac{df}{dz} = -\frac{1}{\sin.^2 \alpha_m}$. L'identité des deux membres exige donc que, pour toute valeur de m, on ait

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad \frac{[Q][Q']}{[V][W']} = -2,$$

[Q], [Q′], [V], [W′], dénotant ce que deviennent les polynomes Q, Q′, V, W′, quand on y remplace x^2 par sa valeur $\sin.^2\alpha_m$, savoir :

$$[Q]=\left(1-\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_1}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1-\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right),$$

$$[Q']=(1-c^2\sin.^2\alpha_m\sin.^2\alpha_1)\ldots\ldots(1-c^2\sin.^2\alpha_m\sin.^2\alpha_{p-2}),$$

$$[V]=(1-c^2\sin.^2\alpha_m\sin.^2\alpha_2)\ldots\ldots(1-c^2\sin.^2\alpha_m\sin.^2\alpha_{p-1}),$$

$$[W']=\left(1-\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_4}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{m-2}}\right)\left(1-\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{m+2}}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right).$$

Si l'on compare ces valeurs des polynomes [Q] et [W′], à la dernière expression de $\frac{M}{\mu}$, on reconnaîtra que l'on peut écrire

$$\frac{M}{\mu}=-\frac{[Q]}{[W']},$$

et, par conséquent, en vertu de l'équation (16),

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{\mu}=\frac{[V]}{[Q']}=\frac{(1-c^2\sin.^2\alpha_m\sin.^2\alpha_2)\ldots(1-c^2\sin.^2\alpha_m\sin.^2\alpha_{p-1})}{(1-c^2\sin.^2\alpha_m\sin.^2\alpha_1)\ldots(1-c^2\sin.^2\alpha_m\sin.^2\alpha_{p-2})}.$$

Cette valeur est celle de $\frac{\Delta(c,\varphi)}{\Delta(k,\psi)}$ développée en facteurs, lorsqu'on suppose $\varphi=\alpha_m$ dans l'équation (14); mais alors, comme il y a toujours un des facteurs de W qui s'évanouit, on a $\sin.^2\psi=0$, en vertu de l'équation (9); et $\frac{1}{2}\frac{M}{\mu}$ se réduit à $\Delta(c,\alpha_m)$.

Cela posé, l'intégration de l'équation (15), se trouve réduite à celle d'une suite de termes de la forme

$$\frac{2\Delta(c,\alpha_m)d\varphi}{1-c^2\sin.^2\alpha_m\sin.^2\varphi}=\frac{2\Delta(c,\alpha_m)d\varphi}{\cos.^2\varphi+\Delta^2(c,\alpha_m)\sin.^2\varphi},$$

dont chacun a pour intégrale $2\varphi_m$, en faisant

$$\text{tang.}\,\varphi_m=\text{tang.}\,\varphi\Delta(c,\alpha_m):$$

donc on aura, en général,

$$\psi=\varphi+2\varphi_2+2\varphi_4+2\varphi_6+\ldots\ldots+2\varphi_{p-1}.$$

Cette nouvelle formule entre les amplitudes φ et ψ, peut remplacer avec avantage l'équation (A).

§ 116. *Corollaire II.* Dans l'équation (9), y (ou $\sin.\psi$) peut devenir nul par l'évanouissement de l'un quelconque des facteurs

$$x, \quad 1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_2}, \ldots\ldots\ldots 1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-1}},$$

évanouissement qui répond aux équations

$$\sin.\varphi = 0, \ \sin.\varphi = \pm \sin.\alpha_2 \ldots\ldots \sin.\varphi = \pm \sin.\alpha_{p-1},$$

ou (*)

$$\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}, \ \varphi = \begin{cases} \alpha_2 \\ \pi - \alpha_2 \\ \pi + \alpha_2 \\ 2\pi - \alpha_2 \end{cases}, \ldots\ldots\ldots \varphi = \begin{cases} \alpha_{p-1} \\ \pi - \alpha_{p-1} \\ \pi + \alpha_{p-1} \\ 2\pi - \alpha_{p-1} \end{cases},$$

dont le nombre est $2 + 4\left(\frac{p-1}{2}\right) = 2p$, et dont chacune correspond à $\sin.\psi = 0$. Il résulte de là un rapport curieux, entre les digamma complets $D(c)$ et $D(k)$, que nous allons démontrer ainsi qu'il suit :

Désignons par $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$, etc., les amplitudes précédentes, disposées par ordre de grandeur, de sorte que $\mathcal{C}^0 = 0$: appelons Φ et Ψ, deux circonférences égales et superposées, $R(\varphi)$ et $R(\psi)$ leurs rayons. Marquons, sur la circonférence Φ, des points m^0, m', m'',... $m^{(2p-1)}$, qui correspondent aux amplitudes $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, etc., comptées à partir de m^0; puis, concevons que les rayons $R(\varphi)$ et $R(\psi)$, confondus à l'origine m^0, s'écartent simultanément de cette position initiale. Les amplitudes φ et ψ croissant ensemble, bien que par des degrés différents, lorsque $R(\varphi)$ sera parvenu au point le plus voisin m', le rayon $R(\psi)$ aura atteint le premier point de la circonférence Ψ, qui donne $\sin.\psi = 0$, c'est-à-dire qu'il aura décrit une demi-circonférence; il en décrira une nouvelle, tandis que $R(\varphi)$ passera de m' en m'', et ainsi de suite : de manière qu'il aura décrit $2p$ demi-circonférences (ou p circonférences entières), lorsque $R(\varphi)$ sera revenu au point de départ. Nous exprimerons cette propriété par les équations simultanées

$$\varphi = 2\pi, \text{ et } \psi = 2p\pi ;$$

(*) Parmi les arcs qui ont même sinus, nous considérons uniquement ceux qui sont moindres qu'une circonférence entière.

d'où

$$\text{dig.}(c,\ 2\pi) = \mu\ \text{dig.}(k,\ 2p\pi),$$
$$4\ \text{dig.}(c,\ \tfrac{1}{2}\pi) = 4\mu\ \text{dig.}(k,\ p.\tfrac{1}{2}\pi),$$

et enfin

$$\mathrm{D}(c) = \mu p \mathrm{D}(k);$$

ce qui est le rapport cherché.

§ 117. *Corollaire III* (*). Soit h le complément du module k : si dans l'équation (3), on écrit au lieu de c, de k, de $x = \sin.\varphi$, et de $y = \sin.\psi$, les valeurs

$$\sqrt{1-b^2},\ \sqrt{1-h^2},\ \sqrt{-1}\ \text{tang.}\,\sigma,\ \sqrt{-1}\ \text{tang.}\,\tau,$$

on obtient

$$\frac{d\sigma}{\Delta(b,\ \sigma)} = \mu \frac{d\tau}{\Delta(h,\ \tau)},$$

dont l'intégrale est

$$\text{dig.}(b,\ \sigma) = \mu\ \text{dig.}(h,\ \tau);$$

ce qui fait voir qu'il est permis de passer des modules primitifs à leurs compléments, sans changer de régulateur, au moyen d'une détermination convenable de τ en σ, qu'il s'agit maintenant de déduire des formules précédemment démontrées. Pour cela, reprenons les équations (9), (13) et (14), qui ne sont autres que

(17) . . . . . $\sin.\psi =$

$$\frac{\sin.\varphi}{\mu} \cdot \frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_2}}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_2} \cdot \frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_4}}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_4} \cdots \frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{p-1}}}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_{p-1}},$$

(18) . . . . . $\cos.\psi =$

$$\cos.\varphi \cdot \frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_1}}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_{p-1}} \cdot \frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_3}}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_{p-3}} \cdots \frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{p-2}}}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_2};$$

(19) . . . . . $\Delta(k,\ \psi) =$

$$\Delta(c,\varphi) \cdot \frac{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_1}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_2} \cdot \frac{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_3}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_4} \cdots \frac{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_{p-2}}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\alpha_{p-1}};$$

(*) Ce corollaire se trouve rapporté par Legendre, sous le titre de *Théorème II de M. Jacobi*.

d'où

(20). . . . . tang. $\psi =$

$$\frac{\text{tang.}\,\varphi}{\mu}\cdot\frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_2}}{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_1}}\cdot\frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_4}}{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_3}}\cdots\cdots\frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{p-1}}}{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{p-2}}}.$$

En substituant, dans l'équation (20), au lieu de

$$\text{tang.}\,\psi,\ \text{tang.}\,\varphi,\ \sin.^2\varphi,$$

leurs valeurs respectives

$$\sqrt{-1}\,.\,\sin.\,\tau,\quad \sqrt{-1}\,.\,\sin.\,\sigma,\quad -\text{tang.}^2\sigma,$$

on obtient immédiatement

(21). . . . . sin. $\tau =$

$$\frac{\sin.\,\sigma}{\mu}\cdot\frac{1+\cot.^2\alpha_2\sin.^2\sigma}{1+\cot.^2\alpha_{p-2}\sin.^2\sigma}\cdot\frac{1+\cot.^2\alpha_4\sin.^2\sigma}{1+\cot.^2\alpha_{p-4}\sin.^2\sigma}\cdots\frac{1+\cot.^2\alpha_{p-1}\sin.^2\sigma}{1+\cot.^2\alpha_1\sin.^2\sigma}.$$

En représentant par

$$\cos.\varphi.\Pi\left(\frac{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{p-m}}}{1-c^2\sin.^2\varphi\,\sin.^2\alpha_m}\right)$$

le produit qui compose le second membre de l'équation (18), celle-ci donne, par la substitution de $\frac{1}{\cos.\,\tau}$ et de $\frac{1}{\cos.\,\sigma}$, au lieu de cos. ψ et de cos. φ,

$$\cos.\,\tau = \cos.\,\sigma\,.\,\Pi\left(\frac{1-c^2\sin.^2\varphi\,\sin.^2\alpha_m}{1-\dfrac{\sin.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{p-m}}}\right):$$

on remplacera, dans cette formule, $\sin.^2\varphi$ par sa valeur $\frac{\sin.^2\sigma}{\sin.^2\sigma-1}$; puis, en vertu de l'équation (10), on écrira $\frac{\cos.^2\alpha_m}{\sin.^2\alpha_{p-m}}$ au lieu de $1-c^2\sin.^2\alpha_m$. Alors, toute réduction faite, il viendra pour cos. τ,

(22). . . . . cos. $\tau =$

$$\cos.\sigma\cdot\frac{1-\dfrac{\cos.^2\alpha_2}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\sin.^2\sigma}{1+\cot.^2\alpha_{p-2}\sin.^2\sigma}\cdot\frac{1-\dfrac{\cos.^2\alpha_4}{\sin.^2\alpha_{p-4}}\sin.^2\sigma}{1+\cot.^2\alpha_{p-4}\sin.^2\sigma}\cdots\frac{1-\dfrac{\cos.^2\alpha_{p-1}}{\sin.^2\alpha_1}\sin.^2\sigma}{1+\cot.^2\alpha_1\sin.^2\sigma},$$

et pareillement

$$(23) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta(h, \tau) =$$

$$\Delta(b, \sigma) . \frac{1 - \frac{\cos.^2\alpha_1 \sin.^2\sigma}{\sin.^2\alpha_{p-1}}}{1 + \cot.^2\alpha_1 \sin.^2\sigma} . \frac{1 - \frac{\cos.^2\alpha_3 \sin.^2\sigma}{\sin.^2\alpha_{p-3}}}{1 + \cot.^2\alpha_3 \sin.^2\sigma} \ldots\ldots \frac{1 - \frac{\cos.^2\alpha_{p-2} \sin.^2\sigma}{\sin.^2\alpha_2}}{1 + \cot.^2\alpha_{p-2} \sin.^2\sigma} .$$

Il résulte de l'équation (21), que τ et σ croissent simultanément, quoique d'une manière inégale, et que l'on ne peut avoir $\sin.\tau = 0$, à moins que d'avoir aussi $\sin.\sigma = 0$. En effet, pour que $\sin.\tau$ devînt nul, par un facteur autre que $\sin.\sigma$, il faudrait pouvoir poser $1 + \cot.^2\alpha_m . \sin.^2\sigma = 0$; ce qui donnerait pour σ des valeurs imaginaires. Je dis maintenant que l'on ne peut avoir $\tau = \sigma + (2n+1)\pi$ (hypothèse qui donnerait aussi $\sin.\tau = 0$, pour $\sin.\sigma = 0$), car il s'ensuivrait que $\cos.\tau = -\cos.\sigma$; ce qui est contraire à l'équation (22). Ainsi, $\tau = 0$, quand $\sigma = 0$; et il faudra faire croître l'amplitude σ jusqu'à 2π, pour que τ devienne égal à une circonférence. On déduit de là la relation

$$D(b) = \mu D(h),$$

qui donne, pour valeur du régulateur μ,

$$\mu = \frac{D(b)}{D(h)} .$$

Cette équation, jointe aux formules (21), (22) et (23), contient la loi suivant laquelle les deux digamma se déduisent l'un de l'autre. Cette loi est telle, que τ est plus grand que σ, tant que σ n'est pas égal à zéro ou à un nombre quelconque de demi-circonférences. En effet, chacun des facteurs qui multiplient $\cos.\sigma$ dans l'équation (22), est visiblement moindre que l'unité, tant que $\sin.^2\sigma$ n'est pas nul.

En comparant la valeur précédente de μ, à celle que nous avons trouvée par le corollaire II, on obtient la relation suivante entre les digamma complets des modules donnés c et b, et les digamma complets des modules inconnus k et h,

$$\frac{D(c)}{D(b)} = p \frac{D(k)}{D(h)} .$$

§ 118. *Corollaire IV*. Dans l'équation

$$(24). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{dig.}(b, \sigma) = \mu \, \text{dig.}(h, \tau),$$

μ, h et τ sont déterminés en fonction de b et de σ, par le système de formules

$$\alpha_m = \text{amp.} \frac{m}{p} \text{D}\left(\sqrt{1-b^2}\right) = \text{amp.} \frac{m}{p} \text{D}(c),$$

$$\mu = \frac{\sin.^2\alpha_1 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \sin.^2\alpha_{p-2}}{\sin.^2\alpha_{p-1} . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \sin.^2\alpha_2},$$

$$\sqrt{1-h^2} = \left(\sqrt{1-b^2}\right)^p \sin.^4\alpha_1 . \; . \; . \; . \; . \; . \; \sin.^4\alpha_{p-2},$$

$$\cos.\tau = \cos.\sigma . \; \frac{1 - \dfrac{\cos.^2\alpha_2}{\sin.^2\alpha_{p-2}} \sin.^2\sigma}{1 + \cot.^2\alpha_{p-2} \sin.^2\sigma} \cdots\cdots \frac{1 - \dfrac{\cos.^2\alpha_{p-1}}{\sin.^2\alpha_1} \sin.^2\sigma}{1 + \cot.^2\alpha_1 \sin.^2\sigma}.$$

Si nous écrivons au lieu de b, un autre module k, et au lieu de σ, une autre amplitude ψ, nous aurons, au lieu de α_m,

$$\text{amp.} \frac{m}{p} \text{D}\left(\sqrt{1-k^2}\right) = \text{amp.} \frac{m}{p} \text{D}(h),$$

que nous désignerons par $\mathcal{G}_m$; ce qui changera μ en

$$\frac{\sin.^2\mathcal{G}_1 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \sin.^2\mathcal{G}_{p-2}}{\sin.^2\mathcal{G}_{p-1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \sin.^2\mathcal{G}_2},$$

que nous dénoterons par μ' : nous aurons aussi, au lieu de cos. τ,

$$\cos.\psi . \; \frac{1 - \dfrac{\cos.^2\mathcal{G}_2}{\sin.^2\mathcal{G}_{p-2}} \sin.^2\psi}{1 + \cot.^2\mathcal{G}_{p-2} \sin.^2\psi} \cdots\cdots \frac{1 - \dfrac{\cos.^2\mathcal{G}_{p-1}}{\sin.^2\mathcal{G}_1} \sin.^2\psi}{1 + \cot.^2\mathcal{G}_1 \sin.^2\psi},$$

que nous représenterons par cos. ω. Le changement de b en k, faisant changer le complément c du module b, en h, complément du module k, et *vice versâ*, l'équation (24) deviendra

$$\text{dig.}(k, \psi) = \mu' \, \text{dig.}(c, \omega),$$

et les équations relatives aux amplitudes, se déduiront des équations (21), (22) et (23), en y écrivant ω, μ', ψ, $\mathcal{G}$, c et k, au lieu de τ, μ, σ, α,

h et b; ce qui donnera les formules

$$(25). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sin.\omega =$$

$$\frac{\sin.\psi}{\mu'} \cdot \frac{1+\cot.^2\mathcal{G}_2 . \sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{G}_{p-2}\sin.^2\psi} \cdot \frac{1+\cot.^2\mathcal{G}_4\sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{G}_{p-4}\sin.^2\psi} \cdots \frac{1+\cot.^2\mathcal{G}_{p-1}\sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{G}_1\sin.^2\psi},$$

$$(26). \quad \cos.\omega = \cos.\psi . \frac{1-\dfrac{\cos.^2\mathcal{G}_2}{\sin.^2\mathcal{G}_{p-2}}\sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{G}_{p-2}\sin.^2\psi} \cdots\cdots \frac{1-\dfrac{\cos.^2\mathcal{G}_{p-1}}{\sin.^2\mathcal{G}_1}\sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{G}_1\sin.^2\psi},$$

$$(27). \quad \Delta(c,\omega) = \Delta(k,\psi) . \frac{1-\dfrac{\cos.^2\mathcal{G}_1}{\sin.^2\mathcal{G}_{p-1}}\sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{G}_1\sin.^2\psi} \cdots\cdots \frac{1-\dfrac{\cos.^2\mathcal{G}_{p-2}}{\sin.^2\mathcal{G}_2}\sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{G}_{p-2}\sin.^2\psi},$$

qui, jointes aux suivantes

$$\mathcal{G}_m = \text{amp.}\frac{m}{p}\,\mathrm{D}(h), \quad \mu' = \frac{\sin.^2\mathcal{G}_1 . \ldots\ldots \sin.^2\mathcal{G}_{p-2}}{\sin.^2\mathcal{G}_{p-1} . \ldots\ldots \sin.^2\mathcal{G}_2},$$

offrent un nouveau système de transformation, pour passer de la relation

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \mu\ \text{dig.}(k, \psi)$$

entre les modules c et k, à la relation

$$(28). \quad \ldots\ldots \quad \text{dig.}(c, \omega) = \frac{1}{\mu'}\,\text{dig.}(k, \psi),$$

qui ne diffère de la précédente que par l'amplitude du premier digamma, et par le régulateur. Il faut remarquer aussi, que l'équation (12) devient actuellement, par les changements simultanés de k en b, de c en h, et de α_m en $\mathcal{G}_m$,

$$b = h^p \sin.^4\mathcal{G}_1 \sin.^4\mathcal{G}_3 \sin.^4\mathcal{G}_5 \ldots\ldots \sin.^4\mathcal{G}_{p-2}.$$

On a fait voir, à propos des équations (21) et (22), que les deux amplitudes parviennent en même temps de zéro à 90° : il en est de même des amplitudes ψ et ω. Prenant donc, à la fois, $\psi = \frac{1}{2}\pi$ et $\omega = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$\mathrm{D}(k) = \mu'\,\mathrm{D}(c);$$

mais on a déjà trouvé, par le corollaire II,

$$\mathrm{D}(c) = \mu p\,\mathrm{D}(k):$$

donc on a, entre les régulateurs μ et μ', la relation générale

$$p\mu\mu' = 1.$$

Maintenant, si l'on combine les deux formules

$$\text{dig.}(c,\varphi) = \mu\,\text{dig.}(k,\psi), \quad \text{dig.}(k,\psi) = \mu'\text{dig.}(c,\omega),$$

on aura

$$\text{dig.}(c,\varphi) = \mu\mu'\text{dig.}(c,\omega),$$

ou

$$\text{dig.}(c,\omega) = p\,\text{dig.}(c,\varphi);$$

formule qui contient la loi de multiplication des digamma, par un nombre impair quelconque p.

§ 119. *Corollaire V.* On peut demander ce que devient le théorème de M. Jacobi, lorsque p est infini. Dans ce cas, soit c un module donné et b son complément : le premier membre de l'équation

$$\frac{D(c)}{D(b)} = p\,\frac{D(k)}{D(h)}\ (\S\ 117),$$

ayant une valeur finie, il faut, pour qu'il en soit de même du second, que $D(h) = \infty$; d'où $h = 1$, $k = 0$, et, par conséquent, $D(k) = \frac{\pi}{2}$. La formule

$$D(b) = \mu D(h)\ (\S\ 117),$$

donnant alors $\mu = 0$, les transformations qui dépendent de ce régulateur deviennent impossibles; mais il n'en est pas de même de celles qui dépendent du régulateur μ'.

En effet, la valeur de μ' étant $\frac{D(k)}{D(c)}$ (§ 118), on aura

$$\mu' = \frac{\pi}{2D(c)};$$

et puisque $\varsigma_m = \text{amp.}\,\frac{m}{p}\,D(h)$, il viendra

$$\text{dig.}(h, \varsigma_m) = \frac{m}{p}\,D(h) = m\,.\,\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{D(b)}{D(c)}.$$

Or, h étant égal à l'unité, on a aussi

$$\text{dig.}(h, \varsigma_m) = \tfrac{1}{2}\log.\,\frac{1 + \sin.\varsigma_m}{1 - \sin.\varsigma_m}:$$

comparant ces deux valeurs de dig.$(h, \mathcal{C}_m)$, et posant, pour simplifier,

$$q = e^{-\pi \frac{D(b)}{D(c)}},$$

on en déduit les équations suivantes

$$\sin.\mathcal{C}_m = \frac{1-q^m}{1+q^m},\ \cos.\mathcal{C}_m = \frac{2\sqrt{q^m}}{1+q^m},\ \cot.^2\mathcal{C}_m = \frac{4q^m}{(1-q^m)^2},$$

$$\frac{1+\sin.^2\psi.\cot.^2\mathcal{C}_m}{1+\sin.^2\psi.\cot.^2\mathcal{C}_{m-1}} = \left(\frac{1-q^{m-1}}{1-q^m}\right)^2 \cdot \frac{1-2q^m\cos.2\psi+q^{2m}}{1-2q^{m-1}\cos.2\psi+q^{2m-2}}.$$

Faisant alors, pour abréger,

$$A = \frac{1-q}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^3}{1-q^4} \cdot \frac{1-q^5}{1-q^6} \cdot \text{etc.},$$

la formule (25) devient

(29) . . . . . $\sin.\omega =$

$$\frac{2D(c)}{\pi} \cdot A^2.\sin.\psi.\ \frac{1-2q^2\cos.2\psi+q^4}{1-2q\cos.2\psi+q^2} \cdot \frac{1-2q^4\cos.2\psi+q^8}{1-2q^3\cos.2\psi+q^6} \cdot \text{etc.}$$

Puisque l'hypothèse $p = \infty$, donne $k = 0$, et, par conséquent, dig. $(k, \psi) = \psi$, l'équation (28) se change en

$$\psi = \mu' \text{ dig.}(c, \omega) = \frac{\pi}{2D(c)} \text{ dig.}(c, \omega);$$

par où l'on voit que la formule (29) détermine algébriquement le sinus de l'amplitude, lorsque le digamma et le module sont connus (*). A la vérité, elle renferme les fonctions $D(c)$ et $D(b)$; mais ces quantités très-aisées à calculer d'ailleurs, sont données par les tables de Legendre avec la plus grande précision : de sorte qu'on peut les regarder comme des constantes analogues aux logarithmes et aux lignes trigonométriques.

(*) Nous donnerons, par la suite, une formule plus simple et plus élégante, pour résoudre le même problème.

Voyons, maintenant, ce que deviennent les deux formules (26) et (27). La supposition de $p = \infty$, rend égales à l'unité toutes les quantités de la forme $\sin.\mathcal{C}_{p-m}$; car l'on a

$$\text{dig.}(h, \mathcal{C}_{p-m}) = \frac{p-m}{p}\,\mathrm{D}(h) = \frac{p-m}{p}\,\text{dig.}\left(h, \frac{\pi}{2}\right),$$

et puisque p est infini, il s'ensuit que

$$\frac{p-m}{p} = 1\,,\ \text{dig.}(h, \mathcal{C}_{p-m}) = \text{dig.}\left(h, \frac{\pi}{2}\right);$$

d'où

$$\mathcal{C}_{p-m} = \frac{\pi}{2}\,,\ \sin.\mathcal{C}_{p-m} = 1\,,\ \cot.\mathcal{C}_{p-m} = 0.$$

La même hypothèse donne aussi $\Delta(k, \psi) = 1$, puisque k devient nul, comme nous l'avons fait voir au commencement de ce paragraphe. Les deux formules dont il s'agit pourront donc s'écrire sous la forme

$$\cos.\omega = \cos.\psi \cdot \frac{1-\cos.^2\mathcal{C}_2 \sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{C}_1 \sin.^2\psi} \cdot \frac{1-\cos.^2\mathcal{C}_4 \sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{C}_3 \sin.^2\psi} \cdot \text{ etc.},$$

$$\Delta(c, \omega) = \frac{1-\cos.^2\mathcal{C}_1 \sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{C}_1 \sin.^2\psi} \cdot \frac{1-\cos.^2\mathcal{C}_3 \sin.^2\psi}{1+\cot.^2\mathcal{C}_3 \sin.^2\psi} \cdot \text{ etc.}:$$

mettant à la place de $\sin.^2\psi$, la valeur $\frac{1}{2}(1-\cos.2\psi)$, et substituant les valeurs précédentes de $\cos.\mathcal{C}_m$ et de $\cot.^2\mathcal{C}_m$, on obtiendra

$$(30)\ \ldots\ \cos.\omega = \mathrm{B}^2.\cos.\psi \cdot \frac{1+2q^2\cos.2\psi+q^4}{1-2q\cos.2\psi+q^2} \cdot \frac{1+2q^4\cos.2\psi+q^8}{1-2q^3\cos.2\psi+q^6} \cdot \text{ etc.},$$

$$(31)\ \ldots\ \Delta(c, \omega) = \mathrm{C}^2 \cdot \frac{1+2q\cos.2\psi+q^2}{1-2q\cos.2\psi+q^2} \cdot \frac{1+2q^3\cos.2\psi+q^6}{1-2q^3\cos.2\psi+q^6} \cdot \text{ etc.},$$

les coefficients B et C ayant pour valeurs respectives

$$\mathrm{B} = \frac{1-q}{1+q^2} \cdot \frac{1-q^3}{1+q^4} \cdot \frac{1-q^5}{1+q^6} \cdot \text{ etc.},$$

$$\mathrm{C} = \frac{1-q}{1+q} \cdot \frac{1-q^3}{1+q^3} \cdot \frac{1-q^5}{1+q^5} \cdot \text{ etc.}$$

§ 120. *Corollaire VI.* Au moyen des formules données dans les §§ 113, 114 et 115, on transformera dig.(c, φ) en une autre fonction dig. (k, ψ), dans laquelle on a $k < c$. On passera de la même manière, du module k à un module plus petit k_1, et ainsi à l'infini ; ce qui formera l'échelle des modules, dans l'ordre décroissant, $c, k, k_1, k_2 \ldots$, jusqu'à la limite zéro. Cette suite peut être continuée à l'infini, dans l'ordre inverse, au moyen de l'équation (12), qui permet de déterminer le module c par le moyen du module plus petit k (*voyez la note* VII). On déterminera donc semblablement le module c_1, par le module plus petit c, de même c_2 par c_1, et ainsi de suite ; ce qui produira, pour tout nombre impair p, une échelle de modules infinie dans les deux sens, ainsi représentée :

lim. 1) . . . . . $c_3, c_2, c_1, c, k, k_1, k_2, k_3$, ... (lim. 0,

et la fonction donnée dig. (c, φ), pourra être transformée en une infinité d'autres, qui auront pour modules les différents termes de cette échelle.

On a vu, par le corollaire III, comment on peut passer de la fonction dig. (b, σ), à la fonction dig. (h, τ), qui a le même régulateur μ que dig. (k, ψ) dans l'échelle précédente. Celle-ci étant formée, il suffit de prendre les compléments des différents termes, pour former une seconde échelle, qui marche en sens contraire de la première, comme on le voit ici :

1) . . . . . $c_3, c_2, c_1, c, k, k_1, k_2, k_3$, ... (0,

0) . . . . . $b_3, b_2, b_1, b, h, h_1, h_2, h_3$ . . . . . (1.

Dans l'ordre naturel de la première échelle, le module k est donné en fonction du module plus grand c, par l'équation (12) : dans la seconde échelle, au contraire, on se servira de la même équation, pour déterminer le module h au moyen du module plus petit b.

§ 121. *Corollaire VII.* Si l'on voulait déduire l'échelle de modules de Lagrange, du théorème de M. Jacobi, il faudrait assimiler entre elles les équations

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \mu \text{ dig.}(k, \psi),$$

$$(32) \quad \text{dig.}(c, \varphi) = \frac{1+c_{,}}{2} \text{ dig.}(c_{,}, \varphi_{,}),$$

dans lesquelles k et $c_{,}$ sont tous deux moindres que c. Ainsi, l'on aurait

$$k = c_{,}, \quad \mu = \frac{1+c_{,}}{2} = \frac{1+k}{2}, \quad c = \frac{2\sqrt{k}}{1+k};$$

mais, d'après l'équation (12), on a

$$c = \frac{\sqrt[p]{k}}{\sqrt[p]{\sin.^4\alpha_1 \sin.^4\alpha_3 \ldots \sin.^4\alpha_{p-2}}}:$$

l'accord de ces deux valeurs de c exige donc que

$$p = 2, \quad \sin.^2\alpha_1 \sin.^2\alpha_3 \ldots \sin.^2\alpha_{p-2} = \frac{1+k}{2};$$

ce qui prouve l'impossibilité de la déduction cherchée, car le théorème de M. Jacobi, suppose nécessairement que p soit un nombre impair. Cependant le nombre 2 joue, dans l'ancienne échelle, un rôle analogue à celui de p dans les nouvelles. En effet, l'équation $D(c) = \mu p D(k)$ du § 116, donne également $p = 2$, quand on prend $k = c_{,}$, $\mu = \frac{1+c_{,}}{2}$; et l'on peut remarquer que la relation $\frac{D(c)}{D(b)} = 2\frac{D(c_{,})}{D_{,}(b_{,})}$ du § 89, est tout-à-fait semblable à celle qui lie les modules c et k à leurs compléments b et h (§ 117).

Par la formule (17), qui se rapporte au théorème de M. Jacobi, le sinus de l'amplitude cherchée s'exprime toujours d'une manière rationnelle, en fonction du sinus de l'amplitude donnée; c'est-à-dire que l'on déduit rationnellement $\sin.\psi$ de $\sin.\varphi$. Cette propriété a son analogue dans l'échelle de Lagrange, mais dans un sens inverse; c'est-à-dire que c'est $\sin.\varphi$ qui se déduit rationnellement de $\sin.\psi$. En effet, nous avons trouvé au § 105, les relations simultanées

$$\sin.\mu = \frac{(1+b)\sin.\lambda}{1+b\sin.^2\lambda},$$

$$\text{dig.}(b, \lambda) = \frac{1+c_{,}}{2}\,\text{dig.}(b_{,}, \mu):$$

si l'on remplace $c_{,}$ par sa valeur $\frac{1-b}{1+b}$, il vient

$$\text{dig.}(b, \lambda) = \frac{1}{1+b}\,\text{dig.}(b_{,}, \mu);$$

d'où

$$\text{dig.}(b_{,}, \mu) = (1 + b)\,\text{dig.}(b, \lambda).$$

Observons que les modules $b_{,}$ et b, appartenaient à une échelle qui supposait $c_{,} < c$, et, par conséquent, $b_{,} > b$. La loi qui lie le module $b_{,}$ au module plus petit b, étant la même que celle qui lie c à $c_{,}$ (§ 89), nous aurons, en écrivant c, $c_{,}$, φ et ψ, au lieu de $b_{,}$, b, μ et λ,

$$\sin.\varphi = \frac{(1 + c_{,})\sin.\psi}{1 + c_{,}\sin.^{2}\psi},$$

$$\text{dig.}(c, \varphi) = (1 + c_{,})\,\text{dig.}(c_{,}, \psi).$$

On peut remarquer qu'en vertu de l'équation (32), l'amplitude ψ est telle qu'on a la relation

$$\text{dig.}(c_{,}, \psi) = \tfrac{1}{2}\,\text{dig.}(c_{,}, \varphi_{,}).$$

La formule $\frac{D(c)}{D(b)} = p\frac{D(k)}{D(h)}$, qui s'applique non-seulement à tous les indices impairs, mais encore au cas de $p = 2$, peut être considérée comme représentant, sous forme transcendante, l'équation algébrique qui existe toujours entre deux modules consécutifs c et k, c étant le plus grand des deux. Cette loi est générale, car elle s'étend même au cas où l'on suppose l'indice p fractionnaire. (*Traité des fonctions elliptiques*, tom. III, § VIII).

CHAPITRE XIII.

Des transcendantes Θ, Λ, Ω *et* T.

§ 122. Parmi les corollaires du théorème de M. Jacobi, nous avons remarqué la formule (29) (§ 119), qui détermine algébriquement l'amplitude, lorsque le digamma est connu. Dans cette formule, on a

$$q = e^{-\pi \frac{D(b)}{D(c)}},$$

$$A = \frac{1-q}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^3}{1-q^4} \cdot \frac{1-q^5}{1-q^6} \cdot \text{etc.};$$

et, si l'on écrit φ au lieu de ω, l'amplitude $\psi = \frac{\pi}{2D(c)}$ dig. (c, ω) deviendra égale à $\frac{\pi}{2D(c)}$ dig. (c, φ); expression que nous avons désignée par x au § 83, et qui donne

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \frac{2D}{\pi} x, \quad \varphi = \text{amp.}\left(\frac{2D}{\pi} x\right);$$

par où la formule précitée pourra s'écrire sous la forme

$$\sin.\text{amp.}\left(\frac{2D}{\pi} x\right) = \frac{2D}{\pi} \cdot A^2 \sin.x \frac{1-2q^2\cos.2x+q^4}{1-2q\cos.2x+q^2} \cdot \frac{1-2q^4\cos.2x+q^8}{1-2q^3\cos.2x+q^6} \cdot \text{etc.},$$

qui renferme de nouvelles transcendantes, dont nous aurons bientôt à nous occuper.

§ 123. Commençons d'abord par déterminer, sous forme finie, les coefficients A, B et C du § 119. Pour cela, nous écrirons les trois

formules (29), (30) et (31), sous la forme

$$(1)\ldots \sin.\mathrm{amp}.\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=\frac{2D}{\pi}A^2\sin.x\,\frac{1-2q^2\cos.2x+q^4}{1-2q\cos.2x+q^2}\cdot\frac{1-2q^4\cos.2x+q^8}{1-2q^3\cos.2x+q^6}\cdot\text{etc.},$$

$$(2)\ldots \cos.\mathrm{amp}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=B^2\cos.x\,\frac{1+2q^2\cos.2x+q^4}{1-2q\cos.2x+q^2}\cdot\frac{1+2q^4\cos.2x+q^8}{1-2q^3\cos.2x+q^6}\cdot\text{etc.},$$

$$(3)\ldots\ \Delta\mathrm{amp}.\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=C^2\cdot\frac{1+2q\cos.2x+q^2}{1-2q\cos.2x+q^2}\cdot\frac{1+2q^3\cos.2x+q^6}{1-2q^3\cos.2x+q^6}\cdot\text{etc.};$$

et nous ferons observer que, si l'on fait $x=\frac{\pi}{2}$ dans ces trois équations, la première donne pour A, cette nouvelle valeur

$$A=\left(\frac{\pi}{2D}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1+q}{1+q^2}\cdot\frac{1+q^3}{1+q^4}\cdot\frac{1+q^5}{1+q^6}\cdot\text{etc.};$$

la seconde devient $0=0$; et la troisième, dont le premier membre devient égal à b, donne pour C,

$$C=\sqrt{b}\cdot\frac{1+q}{1-q}\cdot\frac{1+q^3}{1-q^3}\cdot\frac{1+q^5}{1-q^5}\cdot\text{etc.}$$

L'évanouissement simultané des deux membres de l'équation (2), nous empêche d'obtenir une valeur analogue pour B. Pour lever cette difficulté, nous chercherons la valeur vraie de la fraction $\frac{\cos.\mathrm{amp}.\left(\frac{2D}{\pi}x\right)}{\cos.x}$, dans l'hypothèse de $x=\frac{\pi}{2}$: après avoir différentié, à cet effet, le numérateur et le dénominateur, en remettant au lieu de amp.$\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)$ sa valeur φ, et en observant qu'on a $\sin.\varphi=1$, $\sin.x=1$, nous obtiendrons

$$\frac{d.\cos.\varphi}{d.\cos.x}=\frac{\sin.\varphi d\varphi}{\sin.xdx}=\frac{d\varphi}{dx};$$

mais en différentiant l'équation dig. $\varphi=\frac{2D}{\pi}x$, il vient

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{2D}{\pi}\Delta(o,\varphi)=\frac{2D}{\pi}\Delta\mathrm{amp}.\left(\frac{2Dx}{\pi}\right),$$

et, nous venons de voir que quand $x=\frac{\pi}{2}$, Δamp.$\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)$ a pour valeur b : par conséquent

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{2Db}{\pi},$$

et l'équation (2) donne pour B cette seconde valeur

$$B = \left(\frac{2Db}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+q}{1-q^2} \cdot \frac{1+q^3}{1-q^4} \cdot \frac{1+q^5}{1-q^6} \cdot \text{ etc.}$$

On voit que ces coefficients A, B, C, contiennent diverses fonctions de q, exprimées par une infinité de facteurs binomes. Ces fonctions, au nombre de quatre, sont

$$\begin{aligned}
\alpha &= (1-q)(1-q^3)(1-q^5) \text{ etc.},\\
\alpha' &= (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6) \text{ etc.},\\
\mathcal{C} &= (1+q)(1+q^3)(1+q^5) \text{ etc.},\\
\mathcal{C}' &= (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6) \text{ etc.}
\end{aligned}$$

On trouve d'abord, qu'elles satisfont à l'équation $\alpha' = \alpha\alpha'\mathcal{C}\mathcal{C}'$ ou $1 = \alpha\mathcal{C}\mathcal{C}'$: il nous reste à faire voir qu'elles sont susceptibles d'une expression finie.

Pour cela, soit $e^{x\sqrt{-1}} = V$: on aura

$$\sin. x = \frac{V - V^{-1}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos. 2x = \frac{V^2 + V^{-2}}{2}.$$

Cette dernière valeur permet de partager chaque facteur trinome de la formule (1), en deux facteurs binomes, ainsi qu'il suit :

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \sin. \text{amp.} \left(\frac{2Dx}{\pi}\right) =$$

$$\frac{2D}{\pi} \cdot A^2 \frac{V - V^{-1}}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 - q^2V^2}{1 - qV^2} \cdot \frac{1 - q^2V^{-2}}{1 - qV^{-2}} \cdot \frac{1 - q^4V^2}{1 - q^3V^2} \cdot \frac{1 - q^4V^{-2}}{1 - q^3V^{-2}} \cdot \text{ etc.}$$

Mettons $\frac{2Dx}{\pi} + \sqrt{-1}\, D(b)$ à la place de $\frac{2Dx}{\pi} = \text{dig.}\, \varphi = p$: alors sin. amp. p se change en

$$\sin. \text{amp.} [p + \sqrt{-1}\, D(b)] = \frac{1}{c \sin. \text{amp.}\, p} \; (\S\, 26),$$

et comme on a

$$V = e^{x\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi p}{2D}\sqrt{-1}},$$

V devient

$$e^{\frac{\pi}{2D}\sqrt{-1}\,[p+\sqrt{-1}D(b)]} = e^{\frac{\pi p}{2D}\sqrt{-1}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{D(b)}{D(c)}} = Vq^{\frac{1}{2}};$$

par où l'on voit qu'on peut mettre dans la formule (4), $\frac{1}{c\sin.\text{amp}.p}$ au lieu de sin. amp.p, pourvu qu'on mette en même temps $Vq^{\frac{1}{2}}$ à la place de V. Par cette double substitution, la formule devient

$$\frac{1}{c\sin.\text{amp}.p} = \frac{2D}{\pi}\cdot A^2\,\frac{Vq^{\frac{1}{2}}-V^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{(1-q^5V^2)(1-qV^{-2})}{(1-q^2V^2)(1-V^{-2})}\cdot\frac{(1-q^5V^2)(1-q^5V^{-2})}{(1-q^4V^2)(1-q^2V^{-2})}.\text{etc.}$$

En la comparant à l'équation (4), on trouve, en multipliant ces deux formules membre à membre, et en réduisant,

$$\frac{1}{c} = \left(\frac{2D}{\pi}\right)^2 A^4\cdot\frac{1}{4q^{\frac{1}{2}}};\ \text{d'où résulte}\ A = \left(\frac{\pi}{D}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}}\, c^{-\frac{1}{4}}.$$

Connaissant A, on aura les quatre coefficients α, α', $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, qui entrent dans les valeurs de B et de C, au moyen des équations

$$A = \left(\frac{\pi}{D}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{8}}\, c^{-\frac{1}{4}},$$

$$A = \frac{1-q}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1-q^4}\cdot\frac{1-q^5}{1-q^6}\cdot\ \text{etc.} = \frac{\alpha}{\alpha'},$$

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2D}}\cdot\frac{1+q}{1+q^2}\cdot\frac{1+q^3}{1+q^4}\cdot\frac{1+q^5}{1+q^6}\cdot\text{etc.} = \sqrt{\frac{\pi}{2D}}\cdot\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'},$$

$$B = \frac{1-q}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^4}\cdot\frac{1-q^5}{1+q^6}\cdot\text{etc.} = \frac{\alpha}{\mathcal{C}'}\ (\S\ 119),$$

$$B = \sqrt{\frac{2Db}{\pi}}\cdot\frac{1+q}{1-q^2}\cdot\frac{1+q^3}{1-q^4}\cdot\frac{1+q^5}{1-q^6}\cdot\text{etc.} = \sqrt{\frac{2Db}{\pi}}\cdot\frac{\mathcal{C}}{\alpha'},$$

$$C = \frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\cdot\frac{1-q^5}{1+q^5}\cdot\text{etc.} = \frac{\alpha}{\mathcal{C}}\ (\S\ 119),$$

$$C = \sqrt{b}\cdot\frac{1+q}{1-q}\cdot\frac{1+q^3}{1-q^3}\cdot\frac{1+q^5}{1-q^5}\cdot\text{etc.} = \sqrt{b}\,\frac{\mathcal{C}}{\alpha},$$

dont la comparaison donne les trois suivantes :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \sqrt{\frac{\pi}{D}} \cdot q^{\frac{1}{4}} c^{-\frac{1}{4}}, \quad \frac{\alpha}{\alpha'} = \sqrt{\frac{\pi}{2D}} \cdot \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}, \quad \frac{\alpha}{\mathcal{C}} = \sqrt{b} \cdot \frac{\mathcal{C}}{\alpha},$$

auxquelles il faut joindre la relation

$$1 = \alpha \mathcal{C} \mathcal{C}'.$$

On en déduira sans difficulté

$$(5) \quad \ldots \quad \begin{cases} \alpha^6 = 2q^{\frac{1}{4}} bc^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{C}^6 = 2q^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{4}}, \\ \alpha'^6 = \left(\frac{D}{\pi}\right)^3 q^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{C}'^6 = \frac{1}{4} q^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

d'où

$$B^2 = 2q^{\frac{1}{4}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad C^2 = b^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, tous les coefficients qui entrent dans les expressions de sin.φ, de cos.φ et de $\Delta(\varphi)$, sont déterminés sous forme finie, et l'on a les trois formules

$$(a) \begin{cases} \text{sin. amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right) = 2\,\frac{q^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}}\ \text{sin.}\ x\ \frac{1-2q^2\cos.2x+q^4}{1-2q\cos.2x+q^2} \cdot \frac{1-2q^4\cos.2x+q^8}{1-2q^3\cos.2x+q^6} \cdot \text{etc.}, \\ \text{cos. amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right) = 2q^{\frac{1}{4}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \text{cos.}\ x\ \frac{1+2q^2\cos.2x+q^4}{1-2q\cos.2x+q^2} \cdot \frac{1+2q^4\cos.2x+q^8}{1-2q^3\cos.2x+q^6} \cdot \text{etc.}, \\ \Delta\ \text{amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right) = b^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+2q\cos.2x+q^2}{1-2q\cos.2x+q^2} \cdot \frac{1+2q^3\cos.2x+q^6}{1-2q^3\cos.2x+q^6} \cdot \text{etc.} \end{cases}$$

§ **124.** Représentons, maintenant, par Ω le produit des facteurs binomes

$$(V - V^{-1})(1-q^2V^2)(1-q^2V^{-2})(1-q^4V^2)(1-q^4V^{-2})\,\text{etc.},$$

qui entrent dans la formule (4), par Ω' celui des facteurs

$$(1-qV^2)(1-qV^{-2})(1-q^3V^2)(1-q^3V^{-2})(1-q^5V^2)(1-q^5V^{-2})\,\text{etc.},$$

qui s'y trouvent également, et proposons-nous de remplacer les produits Ω et Ω', par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de q. Soit, à cet effet, l'équation hypothétique

$$A_1(V-V^{-1}) + A_2(V^3-V^{-3}) + A_3(V^5-V^{-5}) + \text{etc.} = \Omega,$$

dans laquelle A_1, A_2, A_3, etc., dénotent des coefficients indépendants de V : en comparant les deux expressions de Ω, on aura

$$(6)\ldots\ldots (V-V^{-1})(1-q^2V^2)(1-q^2V^{-2})(1-q^4V^2)(1-q^4V^{-2}).\text{etc.} = A_1(V-V^{-1}) + A_2(V^3-V^{-3}) + A_3(V^5-V^{-5}) + \text{etc.},$$

et si l'on met qV à la place de V, on doit avoir

$$(7)\ldots\ldots (qV-q^{-1}V^{-1})(1-q^4V^2)(1-V^{-2})(1-q^6V^2)(1-q^2V^{-2})\ \text{etc.} = A_1(qV-q^{-1}V^{-1}) + A_2(q^3V^3-q^{-3}V^{-3}) + A_3(q^5V^5-q^{-5}V^{-5}) + \text{etc.}:$$

or, en retranchant les facteurs communs au premier membre P de l'équation (6), et au premier membre P′ de l'équation (7),

P se réduit à . . . . . $(V-V^{-1})(1-q^2V^2)$, et

P′ se réduit à . . . . . $(qV-q^{-1}V^{-1})(1-V^{-2})$.

Ce dernier résultat est égal au précédent, multiplié par $-q^{-1}V^{-2}$: donc, si l'on multiplie le second membre de l'équation (6), par $-q^{-1}V^{-2}$, le produit devra être égal au second membre de l'équation (7); ou, ce qui revient au même, si l'on multiplie le second membre de l'équation (7), par $+qV^2$, et qu'à ce produit l'on ajoute le second membre de l'équation (6), la somme devra être zéro, et l'on aura l'identité

$$\begin{aligned}
0 = {} & A_1V + A_2V^3 + A_3V^5 + A_4V^7 + \text{etc.}\\
& - A_1V + A_1q^2V^3 + A_2q^4V^5 + A_3q^6V^7 + \text{etc.}\\
& - A_1V^{-1} - A_2V^{-3} - A_3V^{-5} - A_4V^{-7} - \text{etc.}\\
& - A_2q^{-2}V^{-1} - A_3q^{-4}V^{-3} - A_4q^{-6}V^{-5} - A_5q^{-8}V^{-7} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Par les puissances positives de V, on obtiendra les équations de condition

$$A_2 + A_1q^2 = 0,\quad A_3 + A_2q^4 = 0,\quad A_4 + A_3q^6 = 0,\ \text{etc.};$$

et comme les puissances négatives donnent les mêmes équations, on en conclura les déterminations suivantes :

$$A_2 = -A_1q^2,\quad A_3 = -A_2q^4 = A_1q^6,\quad A_4 = -A_3q^6 = A_1q^{12},$$
$$A_5 = -A_4q^8 = -A_1q^{20},\ \text{etc.}:$$

donc, il vient enfin, au lieu de l'équation (6),

$$(V-V^{-1})(1-q^2V^2)(1-q^2V^{-2})(1-q^4V^2)(1-q^4V^{-2})\text{ etc.} =$$
$$A_1[(V-V^{-1})-q^2(V^3-V^{-3})+q^6(V^5-V^{-5})-q^{12}(V^7-V^{-7})+\text{ etc.}];$$

identité dans laquelle les exposants de q résultent de l'addition des termes de la progression 2, 4, 6, 8, etc., et sont, par conséquent, les nombres triangulaires multipliés par 2. On en déduira, en y mettant $q^{\frac{1}{2}}V$ à la place de V, et en multipliant ensuite les deux membres par $-q^{\frac{1}{2}}V$,

$$(1-qV^2)(1-qV^{-2})(1-q^3V^2)(1-q^3V^{-2})(1-q^5V^2)(1-q^5V^{-2})\text{ etc.}$$
$$=A_1[1-q(V^2+V^{-2})+q^4(V^4+V^{-4})-q^9(V^6+V^{-6})+\text{ etc.}];$$

équation dont le premier membre est précisément la valeur de Ω', et dont le second membre est tel, que les exposants de q sont les carrés des nombres naturels. Si l'on remet au lieu de V sa valeur $e^{x\sqrt{-1}}$, ou $\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x$, les deux formules que nous venons de trouver, s'écriront ainsi :

$$(8)\ldots\sin.x(1-2q^2\cos.2x+q^4)(1-2q^4\cos.2x+q^8)(1-2q^6\cos.2x+q^{12})\text{etc.}$$
$$=A_1[\sin.x-q^2\sin.3x+q^6\sin.5x-q^{12}\sin.7x+q^{20}\sin.9x-\text{ etc.}],$$

$$(9)\ldots(1-2q\cos.2x+q^2)(1-2q^3\cos.2x+q^6)(1-2q^5\cos.2x+q^{10})\text{ etc.}$$
$$=A_1[1-2q\cos.2x+2q^4\cos.4x-2q^9\cos.6x+2q^{16}\cos.8x-\text{etc.}].$$

En changeant, dans la première de celles-ci, x en $\frac{\pi}{2}-x$, on aura

$$(10).\cos.x(1+2q^2\cos.2x+q^4)(1+2q^4\cos.2x+q^8)(1+2q^6\cos.2x+q^{12})\text{etc.}$$
$$=A_1[\cos.x+q^2\cos.3x+q^6\cos.5x+q^{12}\cos.7x+q^{20}\cos.9x+\text{ etc.}],$$

et, en opérant le même changement dans la seconde, on obtiendra

$$(11)\ldots(1+2q\cos.2x+q^2)(1+2q^3\cos.2x+q^6)(1+2q^5\cos.2x+q^{10})\text{ etc.}$$
$$=A_1[1+2q\cos.2x+2q^4\cos.4x+2q^9\cos.6x+2q^{16}\cos.8x+\text{etc.}]:$$

si l'on compare maintenant ces quatre dernières équations, aux formules générales (a), celles-ci deviennent

$$(b)\begin{cases}\sin.\text{amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{2q^{\frac{1}{4}}\sin.x-2q^{\frac{9}{4}}\sin.3x+2q^{\frac{25}{4}}\sin.5x-\text{ etc.}}{1-2q\cos.2x+2q^4\cos.4x-2q^9\cos.6x+\text{etc.}},\\[2ex] \cos\text{ amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{2q^{\frac{1}{4}}\cos.x+2q^{\frac{9}{4}}\cos.3x+2q^{\frac{25}{4}}\cos.5x+\text{ etc.}}{1-2q\cos.2x+2q^4\cos.4x-2q^9\cos.6x+\text{etc.}},\\[2ex] \Delta\text{ amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=b^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1+2q\cos.2x+2q^4\cos.4x+2q^9\cos.6x+\text{etc.}}{1-2q\cos.2x+2q^4\cos.4x-2q^9\cos.6x+\text{etc.}}.\end{cases}$$

§ 125. La forme de ces expressions remarquables, a conduit M. Jacobi à considérer deux nouvelles transcendantes $\Theta(q, x)$, $\Lambda(q, x)$ (*), ou simplement $\Theta(x)$, $\Lambda(x)$, dont les valeurs développées en séries sont

$$(12)\begin{cases}\Theta(x)=1-2q\cos.2x+2q^4\cos.4x-2q^9\cos.6x+2q^{16}\cos.8x-\text{etc.},\\ \Lambda(x)=2q^{\frac{1}{4}}\sin.x-2q^{\frac{9}{4}}\sin.3x+2q^{\frac{25}{4}}\sin.5x-2q^{\frac{49}{4}}\sin.7x+\text{etc.}\end{cases}$$

En y écrivant $x+\frac{1}{2}\pi$ au lieu de x, on obtient

$$(13)\ldots\begin{cases}\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)=1+2q\cos.2x+2q^4\cos.4x+2q^9\cos.6x+\text{etc.},\\ \Lambda(x+\frac{1}{2}\pi)=2q^{\frac{1}{4}}\cos.x+2q^{\frac{9}{4}}\cos.3x+2q^{\frac{25}{4}}\cos.5x+\text{etc.};\end{cases}$$

d'où il suit que les trois formules (b) peuvent être présentées sous cette forme très-simple

$$(c)\ldots\ldots\begin{cases}\sin.\,\text{amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{\Lambda(x)}{\Theta(x)},\\ \cos.\,\text{amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{\Lambda(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)},\\ \Delta\,\text{amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=b^{\frac{1}{2}}.\frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)}.\end{cases}$$

Soit maintenant

$$\frac{Dx}{\pi}=\tfrac{1}{2}\,\text{dig.}\,\varphi=\text{dig.}\,\sigma:$$

nous aurons, par la formule relative à la duplication des digamma (§ 20),

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi=\Delta(\sigma)\,\text{tang.}\,\sigma.$$

Par les dernières formules, on a

$$\Delta\text{amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)\text{tang. amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right)=\frac{\Lambda(x)\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)\Lambda(x+\frac{1}{2}\pi)}:$$

(*) M. Jacobi écrit $H(q, x)$ au lieu de $\Lambda(q, x)$; mais la lettre H étant déjà employée pour désigner le type général des fonctions elliptiques, nous avons suivi l'exemple de Legendre, qui l'a remplacée par Λ.

mettant $\frac{1}{2}x$ à la place de x, le premier membre deviendra

$$\Delta\,\text{amp.}\left(\frac{Dx}{\pi}\right)\text{tang. amp.}\left(\frac{Dx}{\pi}\right) = \Delta(\sigma)\,\text{tang.}\,\sigma :$$

par conséquent, on tombe sur cette nouvelle formule

$$(d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{amp.}\left(\frac{2Dx}{\pi}\right) = \frac{\Lambda(\frac{1}{2}x).\,\Theta(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}x).\,\Lambda(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi)}.$$

§ 126. Les propriétés des fonctions Θ et Λ vont nous fournir un grand nombre de formules, dont nous ferons connaître l'usage dans le chapitre suivant. Il suffit de la simple inspection des séries représentées par $\Theta(x)$ et $\Lambda(x)$, pour établir les égalités

$$\begin{array}{l|l}
\Theta(x) = \Theta(-x), & \Lambda(x) = -\Lambda(-x), \\
\Theta(\pi-x) = \Theta(x), & \Lambda(\pi-x) = \Lambda(x), \\
\Theta(\pi+x) = \Theta(x), & \Lambda(\pi+x) = -\Lambda(x), \\
\Theta(\frac{1}{2}\pi+x) = \Theta(\frac{1}{2}\pi-x), & \Lambda(\frac{1}{2}\pi+x) = \Lambda(\frac{1}{2}\pi-x).
\end{array}$$

Ces fonctions peuvent aussi se déduire l'une de l'autre, car on tire aisément des équations (c), les relations

$$\Lambda^2(x) + b\Lambda^2(x+\tfrac{1}{2}\pi) = c\Theta^2(x),$$
$$\Theta^2(x) = c\Lambda^2(x) + b\Theta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi):$$

ainsi, la transcendante $\Theta(x)$ peut se déduire de $\Lambda(x)$, par la formule

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Theta(x) = \sqrt{\frac{1}{c}\Lambda^2(x) + \frac{b}{c}\Lambda^2(x+\tfrac{1}{2}\pi)},$$

et, réciproquement, $\Lambda(x)$ peut se déduire de $\Theta(x)$, par la formule

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Lambda(x) = \sqrt{\frac{1}{c}\Theta^2(x) - \frac{b}{c}\Theta^2(x+\tfrac{1}{2}\pi)}.$$

Une table calculée pour les fonctions $\Theta(q, x)$, selon les diverses valeurs de q et de x, servirait donc à en former une semblable pour les fonctions $\Lambda(q, x)$, et *vice versâ*.

Comparons les expressions de $\Theta(x)$, $\Lambda(x)$, $\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)$, $\Lambda(x+\frac{1}{2}\pi)$, fournies par les équations (12) et (13), aux identités (8), (9), (10)

et (11) : nous en conclurons ces quatre formules nouvelles, dans lesquelles C désigne la constante $\frac{1}{A_1}$ (*),

$$(16)\begin{cases}\Theta(x) = C\,(1-2q\cos.2x+q^2)\,(1-2q^3\cos.2x+q^6)\,(1-2q^5\cos.2x+q^{10})\text{ etc.},\\ \Lambda(x) = 2q^{\frac{1}{4}}C.\sin.x(1-2q^2\cos.2x+q^4)\,(1-2q^4\cos.2x+q^8)(1-2q^6\cos.2x+q^{12})\text{ etc.},\\ \Theta(x+\frac{1}{2}\pi) = C\,(1+2q\cos.2x+q^2)\,(1+2q^3\cos.2x+q^6)\,(1+2q^5\cos.2x+q^{10})\text{ etc.},\\ \Lambda(x+\frac{1}{2}\pi) = 2q^{\frac{1}{4}}C.\cos.x(1+2q^2\cos.2x+q^4)(1+2q^4\cos.2x+q^8)(1+2q^6\cos.2x+q^{12})\text{ etc.}\end{cases}$$

Chaque facteur de $\Lambda(x)$, dénoté par $1-2q^{2m}\cos.2x+q^{4m}$, se décompose en deux autres

$$1-2q^m\cos.x+q^{2m},\quad\text{et}\quad 1+2q^m\cos.x+q^{2m};$$

de sorte qu'on aura

$$\Lambda(x) = 4q^{\frac{1}{4}}C\begin{Bmatrix}\sin.\frac{1}{2}x(1-2q\cos.x+q^2)\,(1-2q^2\cos.x+q^4)\text{ etc.}\times\\ \cos.\frac{1}{2}x(1+2q\cos.x+q^2)\,(1+2q^2\cos.x+q^4)\text{ etc.}\end{Bmatrix};$$

mais, si l'on écrit $q^{\frac{1}{2}}$ à la place de q, et $\frac{1}{2}x$ à la place de x, dans les formules (16), on a (en désignant par C′, ce que devient la constante C, par ce changement)

$$\Lambda(q^{\frac{1}{2}},\tfrac{1}{2}x) = 2C'q^{\frac{1}{8}}\sin.\tfrac{1}{2}x(1-2q\cos.x+q^2)\,(1-2q^2\cos.x+q^4)\text{ etc.},$$
$$\Lambda(q^{\frac{1}{2}},\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi) = 2C'q^{\frac{1}{8}}\cos.\tfrac{1}{2}x(1+2q\cos.x+q^2)(1+2q^2\cos.x+q^4)\text{ etc.}:$$

donc

$$(17)\ \ldots\ \Lambda(q,x) = \frac{C}{C'^2}\,\Lambda(q^{\frac{1}{2}},\tfrac{1}{2}x)\Lambda(q^{\frac{1}{2}},\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi).$$

On trouverait, de la même manière,

$$(18)\ \ldots\ \Theta(q,x) = \frac{C}{C'^2}\,\Theta(q^{\frac{1}{2}},\tfrac{1}{2}x)\Theta(q^{\frac{1}{2}},\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Si l'on se borne à changer q en $q^{\frac{1}{2}}$, dans la seconde des équations (16), on obtient

$$\Lambda(q^{\frac{1}{2}},x) = 2C'q^{\frac{1}{8}}\sin.x(1-2q\cos.2x+q^2)(1-2q^3\cos.2x+q^4)(1-2q^5\cos.2x+q^6)\text{ etc.};$$

(*) Toutes les constantes mentionnées dans ce paragraphe, seront déterminées au paragraphe suivant.

et, puisque tous les facteurs trinomes de $\Lambda(q, x)$, sont compris parmi les facteurs trinomes de $\Lambda(q^{\frac{1}{2}}, x)$, il s'ensuit qu'on a

$$\frac{\Lambda(q^{\frac{1}{2}}, x)}{\Lambda(q, x)} = \frac{C'}{C} q^{-\frac{1}{8}} (1-2q\cos.2x+q^2)(1-2q^5\cos.2x+q^6)(1-2q^5\cos.2x+q^{10}) \text{ etc.},$$

et, par conséquent,

$$(19) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\Lambda(q^{\frac{1}{2}}, x)}{\Lambda(q, x)} = \frac{C'}{C^2} q^{-\frac{1}{8}} \Theta(q, x).$$

D'autres combinaisons des formules déjà obtenues, conduisent à de nouvelles formules, qui serviront plus tard à démontrer des théorèmes, d'une application très-utile dans la théorie des fonctions elliptiques. Prenons, par exemple, les deux formules

$$\sin.\varphi = \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Lambda(x)}{\Theta(x)}, \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\Lambda(\frac{1}{2}x)\Theta(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(\frac{1}{2}x)\Lambda(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi)} :$$

puisqu'on a

$$\sin.\varphi = \frac{2\text{tang.}\frac{1}{2}\varphi}{1+\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi},$$

la substitution des valeurs précédentes, donne l'équation

$$\frac{\Lambda(x)}{\Theta(x)} = \frac{2c^{\frac{1}{2}}\Lambda(\frac{1}{2}x)\,\Theta(\frac{1}{2}x)\,\Lambda(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi)\,\Theta(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi)}{\Lambda^2(\frac{1}{2}x)\Theta^2(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi)+\Theta^2(\frac{1}{2}x)\,\Lambda^2(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\pi)},$$

dans laquelle toutes les fonctions Θ et Λ se rapportent à une même valeur de q. Maintenant, pour réduire le numérateur du second membre, mettons q^2 à la place de q dans les équations (17) et (18) : en appelant $C_{,}$ ce que devient C par cette substitution, qui remet C à la place de C′, on obtient

$$\Lambda(q^2, x) = \frac{C_{,}}{C^2}\,\Lambda(q, \tfrac{1}{2}x)\,\Lambda(q, \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi),$$

$$\Theta(q^2, x) = \frac{C_{,}}{C^2}\,\Theta(q, \tfrac{1}{2}x)\,\Theta(q, \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi);$$

équations dont le produit des seconds membres égale le numérateur proposé, à une constante près. Pour réduire, de même, le dénomi-

nateur, nous remarquerons qu'en vertu des équations (14) et (15), on a la relation

$$\Lambda^2(\tfrac{1}{2}x)\Theta^2(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi)+\Theta^2(\tfrac{1}{2}x)\,\Lambda^2(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$=\frac{c}{b}\left[\Theta^4(\tfrac{1}{2}x)-\Lambda^4(\tfrac{1}{2}x)\right];$$

d'où l'on conclura

$$\frac{\Lambda(x)}{\Theta(x)}=\frac{2bC^4}{C_{,}^2c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\Lambda(q^2,x)\Theta(q^2,x)}{\Theta^4(\tfrac{1}{2}x)-\Lambda^4(\tfrac{1}{2}x)};$$

formule qui va nous en donner une autre, par sa combinaison avec l'équation (19). Si l'on change q en q^2, dans cette dernière, il vient

$$\frac{\Lambda(q,x)}{\Lambda(q^2,x)}=\frac{C}{C_{,}^2}\,q^{-\frac{1}{4}}\Theta(q^2,x):$$

tirant de cette équation la valeur de $\Lambda(q,x)$, pour la substituer dans celle qui précède, on tombe sur ce résultat:

$$(20)\ \ldots\ \Theta(q,x)=\frac{c^{\frac{1}{2}}}{2bC^3q^{\frac{1}{4}}}\left[\Theta^4(q,\tfrac{1}{2}x)-\Lambda^4(q,\tfrac{1}{2}x)\right].$$

§ 127. Il nous reste à déterminer les constantes C, C′ et $C_{,}$: or, nous verrons tout à l'heure, qu'elles se déduisent toutes trois de l'expression de $\Theta(q,0)$ sous forme finie. Pour trouver cette expression, on remarquera que si l'on fait $x=0$, dans la valeur de $\Theta(x)$ développée en série au § 125, il vient

$$\Theta(q,0)=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\text{etc.},$$

et que, si l'on fait la même hypothèse dans la troisième des formules (c), on a

$$(21).\ 1-2q+2q^4-2q^9+\text{etc.}=\sqrt{b}(1+2q+2q^4+2q^9+\text{etc.}).$$

Représentons par $\Pi(c)$ la série qui multiplie $\sqrt{b}$, et cherchons ce que devient $\Pi(c)$, quand on change q en q^4: en vertu du § 89, on a la suite d'égalités

$$\frac{D(c)}{D(b)}=2\frac{D(c_{,})}{D(b_{,})}=4\frac{D(c_{,,})}{D(b_{,,})}=8\frac{D(c_{,,,})}{D(b_{,,,})}=\text{etc.},$$

et, par conséquent,

$$\frac{D(b_{,,})}{D(c_{,,})} = 4\frac{D(b)}{D(c)}.$$

Or, changer q en q^4 c'est changer $\frac{D(b)}{D(c)}$ en $4\frac{D(b)}{D(c)}$, ou $\frac{D(b)}{D(c)}$ en $\frac{D(b_{,,})}{D(c_{,,})}$: ainsi, par le changement dont il s'agit, $\Pi(c)$ deviendra $\Pi(c_{,,})$.

D'après le § 81, on a

$$D(c_{,,}) = \frac{1+b}{2} \cdot \frac{1+b_{,}}{2} \cdot D(c);$$

et comme $b_{,} = \frac{2\sqrt{b}}{1+b}$, on a, entre les digamma complets $D(c_{,,})$ et $D(c)$, la relation

$$(22). \quad \ldots\ldots \quad \frac{\sqrt{D(c_{,,})}}{\sqrt{D(c)}} = \frac{1+\sqrt{b}}{2}.$$

Observons, maintenant, qu'on déduit de l'équation (21) et de la valeur de $\Pi(c)$, la relation

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad 1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+\text{etc.} = \frac{1+\sqrt{b}}{2}\Pi(c);$$

d'où

$$\Pi(c_{,,}) = \frac{1+\sqrt{b}}{2}\Pi(c):$$

de là, et de l'équation (22), on tire

$$\frac{\Pi(c_{,,})}{\sqrt{D(c_{,,})}} = \frac{\Pi(c)}{\sqrt{D(c)}}.$$

Le premier membre de cette équation est composé en $c_{,,}$, comme le second l'est en c; d'où il suit que le rapport $\frac{\Pi(c)}{\sqrt{D(c)}}$ est une fonction de c, telle que l'on peut y changer c en $c_{,,}$, ou (ce qui revient au même) q en q^4. Si donc l'on suppose ce rapport développé en série de la forme

$$\frac{\Pi(c)}{\sqrt{D(c)}} = A+Bq+Cq^2+Dq^3+Eq^4+Fq^5+\text{etc.},$$

A, B, C, etc., étant des coefficients constants, on aura l'identité

$$A+Bq+Cq^2+Dq^3+\text{etc.}=A+Bq^4+Cq^8+Dq^{12}+\text{etc.};$$

d'où l'on conclura que tous ces coefficients sont nuls à l'exception de A, et qu'ainsi le rapport dont il s'agit est égal à une constante. Or, lorsque $c=0$, on a $q=0$, $D(c)=\frac{1}{2}\pi$, et $\Pi(c)=1$: donc la constante a pour valeur $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}}$, et $\Pi(c)$ est égal à $\sqrt{\frac{2D(c)}{\pi}}$. Il s'ensuit qu'on a

$$1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\text{etc.}=\sqrt{\frac{2D}{\pi}},$$

et, finalement, à cause de l'équation (21),

$$\Theta(q,0)=\sqrt{\frac{2bD}{\pi}}.$$

Voyons comment cette valeur de $\Theta(q,0)$ va nous conduire à la détermination des constantes C, C′ et C,. Pour assigner la première, nous remarquerons que le développement de $\Theta(x)$ en facteurs trinomes (§ 126), fournit la relation

$$\frac{\Theta(q,0)}{C}=(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\,\text{etc.}=\alpha^2,$$

et que, d'après le § 123, α^2 a pour valeur $2^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{6}}$. On en conclut immédiatement

$$C=q^{-\frac{1}{12}}(2bc)^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{D}{\pi}}.$$

La constante C′ étant ce que devient C, quand q devient $\sqrt{q}$, nous ferons observer que $\frac{D(c')}{D(b')}=2\frac{D(c)}{D(b)}$, par la même raison que $\frac{D(c)}{D(b)}=2\frac{D(c,)}{D(b,)}$, d'où $\frac{1}{2}\frac{D(b)}{D(c)}=\frac{D(b')}{D(c')}$. Or, changer q en $q^{\frac{1}{2}}$, c'est changer $\frac{D(b)}{D(c)}$ en $\frac{1}{2}\frac{D(b)}{D(c)}$, ou c et b en c' et b' : par conséquent

$$C'=q^{-\frac{1}{24}}(2b'c')^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{D(c')}{\pi}}.$$

Mais on a

$$c'=\frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad b'=\frac{1-c}{1+c},\quad D(c')=(1+c)D(c):$$

il vient donc

$$C' = q^{-\frac{1}{24}}(4b^2\sqrt{c})^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{D}{\pi}}.$$

Quant à $C_{,}$, qui est ce que devient C par le changement de q en q^2, il est évident qu'on trouverait, par un raisonnement analogue à celui qui nous a donné C',

$$C_{,} = q^{-\frac{1}{6}}(2b_{,}c_{,})^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{D(c_{,})}{\pi}};$$

et comme on a

$$b_{,} = \frac{2\sqrt{b}}{1+b}, \quad c_{,} = \frac{1-b}{1+b}, \quad D(c_{,}) = \frac{1+b}{2}D(c),$$

il vient, en faisant toutes les substitutions et réductions nécessaires,

$$C_{,} = (2q)^{-\frac{1}{6}}c^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{12}}\sqrt{\frac{D}{\pi}}.$$

§ 128. Si dans l'équation

$$\frac{\Delta}{\sqrt{b}} = \frac{\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{\Theta(x)},$$

on prend les logarithmes des deux membres, les différentielles de ces logarithmes, divisées par dx, donnent la relation

$$-\frac{c^2\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta^2}.\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d.\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{dx.\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} - \frac{d.\Theta(x)}{dx.\Theta(x)}:$$

si l'on y substitue la valeur $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2D}{\pi}\Delta$ qui résulte de l'équation $\text{dig.}\varphi = \frac{2Dx}{\pi}$, on obtiendra

$$-\frac{2D}{\pi}.\frac{c^2\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta} = \frac{d\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{dx.\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)} - \frac{d\Theta(x)}{dx.\Theta(x)}.$$

Soit $\text{dig.}\zeta$ une fonction de première espèce, telle qu'on ait

$$\text{dig.}\,\zeta = \frac{2D}{\pi}(x+\tfrac{1}{2}\pi) = D + \text{dig.}\varphi:$$

il viendra, par les propriétés connues,

$$E + \text{eps.}\varphi - \text{eps.}\zeta = c^2\sin.\varphi\sin.\zeta = \frac{c^2\sin.\varphi\cos.\varphi}{\Delta},$$

et si l'on fait $i = \frac{E}{D}$, on déduira de ces deux équations

$$\frac{c^2 \sin.\varphi \cos.\varphi}{\Delta} = (\text{eps.}\varphi - i\,\text{dig.}\,\varphi) - (\text{eps.}\zeta - i\text{dig.}\zeta).$$

Combinant ce résultat avec celui qu'ont donné les différentielles des logarithmes, on trouve l'équation

$$\frac{2D}{\pi}(\text{eps.}\varphi - i\,\text{dig.}\varphi) - \frac{d\Theta(x)}{dx.\Theta(x)} = \frac{2D}{\pi}(\text{eps.}\zeta - i\,\text{dig.}\zeta) - \frac{d\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)}{dx.\Theta(x+\frac{1}{2}\pi)},$$

dans laquelle il importe de remarquer que eps. φ et eps. ζ, pouvant être dénotés par eps. amp. $\left[\frac{2D}{\pi}x\right]$ et eps. amp. $\left[\frac{2D}{\pi}(x+\frac{1}{2}\pi)\right]$, les deux membres sont des fonctions semblables, l'un de x et l'autre de $x+\frac{1}{2}\pi$: on peut donc écrire cette équation sous la forme

$$(24) \quad \ldots\ldots \quad \Phi(x) = \Phi(x+\tfrac{1}{2}\pi).$$

La fonction $\Phi(x)$ se compose d'un epsilon, d'un digamma et de la fonction

$$\frac{d\Theta(x)}{dx.\Theta(x)} = \frac{4q\sin.2x - 8q^4\sin.4x + 12q^9\sin.6x - 16q^{16}\sin.8x + \text{etc.}}{1 - 2q\cos.2x + 2q^4\cos.4x - 2q^9\cos.6x + 2q^{16}\cos.8x - \text{etc.}}:$$

celle-ci s'évanouissant, ainsi que eps. φ et dig. φ, quand $x=0$, il s'ensuit que $\Phi(x)=0$, quand $x=0$. Ce résultat, combiné avec l'équation (24), fait voir que $\Phi(x)$ s'évanouit encore, chaque fois que l'arc x est égal à un nombre quelconque de quarts de circonférence.

Je dis maintenant que la fonction $\Phi(x)$ *est toujours nulle, quelle que soit la valeur de* x.

Pour le prouver, nous aurons recours à la formule (20), dans laquelle nous remplacerons x par $2x$; ce qui donnera

$$\Theta(2x) = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{2bC^3q^{\frac{1}{4}}}\left[\Theta^4(x) - \Lambda^4(x)\right]:$$

comme on a $\sin.\varphi = \frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Lambda(x)}{\Theta(x)}$, d'où $\Lambda(x) = c^{\frac{1}{2}}\,\Theta(x)\sin.\varphi$, il viendra, en portant au lieu de $\Lambda(x)$ sa valeur dans l'équation précédente,

$$\Theta(2x) = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{2bC^3q^{\frac{1}{4}}}\,\Theta^4(x)\,(1 - c^2\sin.^4\varphi).$$

Cette équation étant différentiée *logarithmiquement*, c'est-à-dire après que l'on a pris les logarithmes des deux membres, donne

$$(25) \quad \ldots \quad \frac{d\Theta(2x)}{\Theta(2x)} = \frac{4d\Theta(x)}{\Theta(x)} - \frac{4c^2\sin.^3\varphi\cos.\varphi}{1-c^2\sin.^4\varphi}\,d\varphi :$$

or, si l'on différentie la formule (17) du § 66, après l'avoir écrite sous la forme

$$\Upsilon(\mu) = 4\Upsilon(\varphi) + \log.(1-c^2\sin.^4\varphi),$$

μ représentant l'amplitude d'un digamma double de celui de φ, l'on aura

$$(26) \quad . \quad . \quad \text{eps.}\mu.\frac{d\mu}{\Delta(\mu)} = 4\,\text{eps.}\varphi.\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \frac{4c^2\sin.^3\varphi\cos.\varphi}{1-c^2\sin.^4\varphi}d\varphi ;$$

et comme $\frac{d\mu}{\Delta(\mu)} = 2\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$, il vient, en substituant à $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$ sa valeur $\frac{2D}{\pi}dx$,

$$\frac{4D}{\pi}\,\text{eps.}\mu.dx = \frac{8D}{\pi}\,\text{eps.}\varphi.dx - \frac{4c^2\sin.^3\varphi\cos.\varphi}{1-c^2\sin.^4\varphi}.\,d\varphi.$$

Retranchant de ce résultat, l'équation (25), on obtient, en combinant le reste avec l'équation déjà employée $\text{dig.}\mu = 2\,\text{dig.}\varphi$,

$$\frac{2D}{\pi}(\text{eps.}\mu - i\,\text{dig.}\mu) - \frac{d\Theta(2x)}{2dx.\Theta(2x)} = 2\left[\frac{2D}{\pi}(\text{eps.}\varphi - i\,\text{dig.}\varphi) - \frac{d\Theta(x)}{dx.\Theta(x)}\right];$$

ce qui met en évidence une seconde propriété générale de la fonction Φ, caractérisée par l'équation

$$\Phi(2x) = 2\Phi(x).$$

Maintenant, si l'on développe $\Phi(x)$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, cette série ne contiendra aucun terme indépendant de x, car s'il en était autrement, $\Phi(x)$ ne s'évanouirait pas avec x: on pourra donc écrire

$$\Phi(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.},$$

A, B, C, etc., étant des coefficients constants. Mais alors, on aura aussi

$$\Phi(2x) = 2Ax + 2^2Bx^2 + 2^3Cx^3 + 2^4Dx^4 + 2^5Ex^5 + \text{etc.};$$

et comme $\Phi(2x)=2\Phi(x)$, on en conclura $B=0$, $C=0$, $D=0$, etc., et il restera simplement $\Phi(x)=Ax$. Or, la condition $\Phi(x)=\Phi(x+\frac{1}{2}\pi)$ exige que l'on ait $Ax=Ax+A.\frac{1}{2}\pi$; d'où $A=0$: on a donc, en général, $\Phi(x)=0$; ce qu'il fallait démontrer.

§ 129. La première conséquence de l'équation $\Phi(x)=0$, est

$$\frac{2D}{\pi}(\text{eps.}\varphi-i\,\text{dig.}\varphi)=\frac{4q\sin.2x-8q^4\sin.4x+12q^9\sin.6x-\text{etc.}}{1-2q\cos.2x+2q^4\cos.4x-2q^9\cos.6x+\text{etc.}};$$

formule qui servira à déterminer la fonction de seconde espèce eps.φ, au moyen de la fonction de première espèce dig.$\varphi=\frac{2Dx}{\pi}$: de sorte qu'on aura cette expression de eps.φ en fonction de x,

$$(27).\ \text{eps.}\varphi=\frac{2Ex}{\pi}+\frac{2\pi}{D}.\frac{q\sin.2x-2q^4\sin.4x+3q^9\sin.6x-\text{etc.}}{1-2q\cos.2x+2q^4\cos.4x-2q^9\cos.6x+\text{etc.}}.$$

La fonction $\Theta(x)$ étant développée en facteurs trinomes, comme il suit:

$$\Theta(x)=C(1-2q\cos.2x+q^2)(1-2q^3\cos.2x+q^6)(1-2q^5\cos.2x+q^{10})\text{etc.},$$

on en tire, par la différentiation,

$$\frac{d\Theta(x)}{dx.\Theta(x)}=\frac{4q\sin.2x}{1-2q\cos.2x+q^2}+\frac{4q^5\sin.2x}{1-2q^3\cos.2x+q^6}+\frac{4q^3\sin.2x}{1-2q^5\cos.2x+q^{10}}+\text{etc.}$$

Mais, par une formule aisée à vérifier, on a

$$\frac{q\sin.2x}{1-2q\cos.2x+q^2}=q\sin.2x+q^2\sin.4x+q^3\sin.6x+\text{etc.}:$$

donc, le second membre de l'équation précédente, peut se développer ainsi:

$4q$	$\sin.2x+4q^2$	$\sin.4x+4q^3$	$\sin.6x+4q^4$	$\sin.8x+\text{etc.}$;
$+4q^3$	$+4q^6$	$+4q^9$	$+4q^{12}$	
$+4q^5$	$+4q^{10}$	$+4q^{15}$	$+4q^{20}$	
$+\text{etc.}$	$+\text{etc.}$	$+\text{etc.}$	$+\text{etc.}$	

et si l'on fait la somme de chaque colonne verticale, cette quantité deviendra

$$\frac{4q}{1-q^2}\sin.2x+\frac{4q^2}{1-q^4}\sin.4x+\frac{4q^3}{1-q^6}\sin.6x+\frac{4q^4}{1-q^8}\sin.8x+\text{etc.}:$$

donc enfin, l'équation $\Phi(x)=0$ pourra s'écrire sous la forme

$$(28)..\text{eps.}\varphi=\frac{2Ex}{\pi}+\frac{2\pi}{D}\left[\frac{q}{1-q^2}\sin.2x+\frac{q^2}{1-q^4}\sin.4x+\frac{q^5}{1-q^6}\sin.6x+\text{etc.}\right].$$

Si l'on suppose x infiniment petit, ce qui donne eps. $\varphi=\varphi=\frac{2Dx}{\pi}$, on déduira de cette dernière série, la formule

$$E=D-\frac{2\pi^2}{D}\left[\frac{q}{1-q^2}+\frac{2q^2}{1-q^4}+\frac{3q^3}{1-q^6}+\text{etc.}\right],$$

qui servira à calculer l'epsilon complet $E(c)$, au moyen de la fonction q, c'est-à-dire au moyen des digamma complets $D(c)$ et $D(b)$.

Si l'on multiplie respectivement les deux membres de l'équation (28), par $\frac{d\varphi}{\Delta}$ et par $\frac{2Ddx}{\pi}$, on trouve en intégrant, après avoir déterminé la constante par la condition que φ et x s'évanouissent ensemble, et en remplaçant, en général, $1-\cos.2z$ par $2\sin.^2z$,

$$(29)...\Upsilon(\varphi)=\frac{2DE}{\pi^2}x^2+4\left[\frac{q}{1-q^2}\sin.^2x+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1-q^4}\sin.^2 2x+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{q^5}{1-q^6}\sin.^2 3x+\text{etc.}\right].$$

Si l'on prend, dans cette formule, $\varphi=\frac{\pi}{2}\left(\text{d'où } x=\frac{\pi}{2}\right)$, on a, en vertu du §65,

$$(30)...\tfrac{1}{8}\log.\frac{1}{b}=\frac{q}{1-q^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{1-q^6}+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{q^5}{1-q^{10}}+\text{etc.}$$

Si l'on différentie la formule (28), en observant qu'on a

$$d.\text{eps.}\varphi=\Delta^2.\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{2D\Delta^2dx}{\pi},$$

on trouvera

$$1-c^2\sin.^2\varphi=\frac{E}{D}+\frac{2\pi^2}{D^2}\left(\frac{q\cos.2x}{1-q^2}+\frac{2q^2\cos.4x}{1-q^4}+\frac{3q^3\cos.6x}{1-q^6}+\text{etc.}\right).$$

Cette équation, combinée avec le résultat qu'on obtient en y faisant $\varphi=0$, donne

$$(31)..\sin.^2\varphi=\frac{4\pi^2}{c^2D^2}\left[\frac{q\sin.^2x}{1-q^2}+\frac{2q^2\sin.^2 2x}{1-q^4}+\frac{3q^3\sin.^2 3x}{1-q^6}+\text{etc.}\right];$$

expression assez élégante, qui peut servir à déterminer l'amplitude par le digamma.

§ 130. Soit maintenant

$$\frac{2Dx}{\pi} = \text{dig.}\varphi, \quad \frac{2Dl}{\pi} = \text{dig.}\lambda :$$

soit, de plus,

$$\text{dig.}\mu = \text{dig.}\varphi + \text{dig.}\lambda = \frac{2D}{\pi}(x + l),$$

$$\text{dig.}\nu = \text{dig.}\varphi - \text{dig.}\lambda = \frac{2D}{\pi}(x - l) :$$

on aura d'abord, en considérant λ comme constant,

$$\frac{2Ddx}{\pi} = \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{d\mu}{\Delta(\mu)} = \frac{d\nu}{\Delta(\nu)}.$$

Ensuite, l'application de la formule $\Phi(x) = 0$, ou

$$(32) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d\Theta(x)}{\Theta(x)} = \frac{2Ddx}{\pi}(\text{eps.}\varphi - i\,\text{dig.}\varphi),$$

donnera les deux équations

$$\frac{d\Theta(x+l)}{\Theta(x+l)} = \frac{2Ddx}{\pi}(\text{eps.}\mu - i\,\text{dig.}\mu),$$

$$\frac{d\Theta(x-l)}{\Theta(x-l)} = \frac{2Ddx}{\pi}(\text{eps.}\nu - i\,\text{dig.}\nu);$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\Theta(x+l)}{\Theta(x+l)} - \frac{d\Theta(x-l)}{\Theta(x-l)} = \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}(\text{eps.}\mu - \text{eps.}\nu - i\,\text{dig.}\mu + i\,\text{dig.}\nu).$$

Mais les propriétés des epsilon fournissent les équations

$$\text{eps.}\varphi + \text{eps.}\lambda - \text{eps.}\mu = c^2 \sin.\varphi \sin.\lambda \sin.\mu,$$
$$\text{eps.}\nu + \text{eps.}\lambda - \text{eps.}\varphi = c^2 \sin.\varphi \sin.\lambda \sin.\nu;$$

d'où

$$\text{eps.}\mu - \text{eps.}\nu = 2\,\text{eps.}\lambda - c^2 \sin.\lambda \sin.\varphi(\sin.\mu + \sin.\nu) :$$

et comme on a, d'ailleurs,

$$\text{dig.}\mu - \text{dig.}\nu = 2\,\text{dig.}\lambda,$$

$$\sin.\mu + \sin.\nu = \frac{2 \sin.\varphi \cos.\lambda\Delta(\lambda)}{1 - c^2 \sin.^2\lambda \sin.^2\varphi} \text{ (§ 62)},$$

on obtiendra, en faisant les substitutions,

$$\frac{d\Theta(x-l)}{\Theta(x-l)}-\frac{d\Theta(x+l)}{\Theta(x+l)}=\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\left(\frac{2c^2\sin.^2\varphi\sin.\lambda\cos.\lambda\Delta(\lambda)}{1-c^2\sin.^2\lambda\sin.^2\varphi}-2\,\text{eps.}\lambda+2i\,\text{dig.}\lambda\right);$$

équation différentielle dont l'intégrale est

$$(\theta)\ldots\cot.\lambda\Delta(\lambda)[\text{kal.}(\lambda,c,\varphi)-\text{dig.}\varphi]+(i\,\text{dig.}\lambda-\text{eps.}\lambda)\text{dig.}\varphi=\tfrac{1}{2}\log.\frac{\Theta(x-l)}{\Theta(x+l)}:$$

on n'a point ajouté de constante arbitraire, parce que les deux membres s'évanouissent lorsque $\varphi=0$.

§ 131. La formule précédente nous apprend, qu'à l'aide de la transcendante Θ, on peut réduire les kappa logarithmiques à des fonctions de deux arguments. Il est donc naturel de chercher à modifier notre formule de manière à la rendre applicable aux kappa circulaires. Introduisons, à cet effet, dans ses deux membres, la substitution imaginaire de sin. λ en $\sqrt{-1}$ tang. θ : par les résultats obtenus aux §§ 25 et 31, le premier membre multiplié par $\sqrt{-1}$, deviendra

$$\frac{\Delta(b,\theta)}{\sin.\theta\cos.\theta}[\text{kap}\,(c^2\text{tang.}^2\theta,c,\varphi)-\cos.^2\theta\,\text{dig.}(c,\varphi)]+\text{dig.}(c,\varphi)[(1-i)\text{dig.}(b,\theta)-\text{eps.}(b,\theta)].$$

Quant au second membre, également multiplié par $\sqrt{-1}$, il a pour développement

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\log.\left\{\begin{matrix}1-2q\cos.2x\cos.2l+2q^4\cos.4x\cos.4l-\text{etc.}\\-2q\sin.2x\sin.2l+2q^4\sin.4x\sin.4l-\text{etc.}\end{matrix}\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\log.\left\{\begin{matrix}1-2q\cos.2x\cos.2l+2q^4\cos.4x\cos.4l-\text{etc.}\\+2q\sin.2x\sin.2l-2q^4\sin.4x\sin.4l+\text{etc.}\end{matrix}\right\};$$

mais, en faisant

$$\text{dig.}\,(b,\theta)=\frac{2\text{D}(b)t}{\pi},$$

l'équation dig. $(c,\lambda)=\sqrt{-1}$ dig. (b,θ) donne

$$l=\sqrt{-1}\cdot\frac{\text{D}(b)}{\text{D}(c)}\,t:$$

par conséquent

$$2\cos.2l = e^{-\frac{2D(b)}{D(c)}t} + e^{\frac{2D(b)}{D(c)}t} = q^{-\frac{2t}{\pi}} + q^{\frac{2t}{\pi}},$$

$$2\sin.2l = \sqrt{-1}\left(q^{-\frac{2t}{\pi}} - q^{\frac{2t}{\pi}}\right).$$

On aura des valeurs semblables pour $2\cos.4l$, $2\sin.4l$, etc. : faisant ensuite

$$P = 1 - q\left(q^{-\frac{2t}{\pi}} + q^{\frac{2t}{\pi}}\right)\cos.2x + q^4\left(q^{-\frac{4t}{\pi}} + q^{\frac{4t}{\pi}}\right)\cos.4x$$
$$- q^9\left(q^{-\frac{6t}{\pi}} + q^{\frac{6t}{\pi}}\right)\cos.6x + \text{etc.},$$

$$Q = q\left(q^{-\frac{2t}{\pi}} - q^{\frac{2t}{\pi}}\right)\sin.2x - q^4\left(q^{-\frac{4t}{\pi}} - q^{\frac{4t}{\pi}}\right)\sin.4x$$
$$+ q^9\left(q^{-\frac{6t}{\pi}} - q^{\frac{6t}{\pi}}\right)\sin.6x - \text{etc.},$$

il viendra

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\log.\Theta(x-l) = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\log.(P - Q\sqrt{-1}),$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\log.\Theta(x+l) = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\log.(P + Q\sqrt{-1}):$$

donc

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\log.\frac{\Theta(x-l)}{\Theta(x+l)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\log.\frac{P - Q\sqrt{-1}}{P + Q\sqrt{-1}}.$$

Soit enfin (*)

$$\Omega = \frac{Q}{P}:$$

la quantité logarithmique qui précède, se réduira à l'arc de cercle qui a Ω pour tangente, et l'on aura cette nouvelle formule

$$(f).\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Delta(b,\theta)}{\sin.\theta\cos.\theta}[\text{kap.}(c^2\,\text{tang.}^2\theta, c, \varphi) - \cos.^2\theta\,\text{dig.}(c,\varphi)] \\ &+ \text{dig.}(c,\varphi)[(1-i)\,\text{dig.}(b,\theta) - \text{eps.}(b,\theta)] \\ &= \text{arc}(\text{tang.} = \Omega), \end{aligned}\right.$$

(*) Dans le traité de Legendre, Ω désigne l'arc qui a pour tangente $\frac{Q}{P}$.

par laquelle on voit que le kappa logarithmique de la formule (e), s'est changé en kappa circulaire. Mais cette transformation ne nous procure pas l'avantage d'exprimer les kappa circulaires, par des fonctions de deux arguments, car la transcendante Ω, qui est devenue notre nouvelle auxiliaire, dépend essentiellement de trois quantités, q, x et t; et l'on ne voit aucun moyen de la décomposer en deux parties, qui pourraient s'exprimer chacune par deux arguments. Ainsi, la propriété des kappa logarithmiques, qui fait l'objet des §§ 62 et 130, ne paraît pas s'étendre aux kappa circulaires.

§ 132. Si l'on ramène au type normal la fonction kap.$(c^2\text{tang.}^2\theta, c, \varphi)$, à l'aide des formules (a) et (b) du chapitre V, l'équation (f) sera remplacée par

$$(g)\ldots\left\{\begin{aligned}&\frac{b^2\sin.\theta\cos.\theta}{\Delta(b,\theta)}\left[\text{kac.}(\theta,c,\varphi)-\text{dig.}(c,\varphi)\right]\\&=\text{dig.}(c,\varphi)\left[(1-i)\,\text{dig.}(b,\theta)-\text{eps.}(b,\theta)\right]\\&+\text{arc}\left(\text{tang.}=\frac{\Delta(c,\varphi)}{\cot.\varphi}\cdot\frac{\Delta(b,\theta)}{\cot.\theta}\right)-\text{arc}(\text{tang.}=\Omega).\end{aligned}\right.$$

Soit r ce que devient la fonction q lorsqu'on y permute les modules b et c, et représentons par P′ et Q′, deux séries composées avec r et les angles-limites t et x, de la même manière que P et Q avec q et les angles-limites x et t; c'est-à-dire que

$$\text{P}'=1-r\left(r^{-\frac{2x}{\pi}}+r^{\frac{2x}{\pi}}\right)\cos.2t+r^4\left(r^{-\frac{4x}{\pi}}+r^{\frac{4x}{\pi}}\right)\cos.4t$$

$$-r^9\left(r^{-\frac{6x}{\pi}}+r^{\frac{6x}{\pi}}\right)\cos.6t+r^{16}\left(r^{-\frac{8x}{\pi}}+r^{\frac{8x}{\pi}}\right)\cos.8t-\text{etc.},$$

$$\text{Q}'=r\left(r^{-\frac{2x}{\pi}}-r^{\frac{2x}{\pi}}\right)\sin.2t-r^4\left(r^{-\frac{4x}{\pi}}-r^{\frac{4x}{\pi}}\right)\sin.4t$$

$$+r^9\left(r^{-\frac{6x}{\pi}}-r^{\frac{6x}{\pi}}\right)\sin.6t-r^{16}\left(r^{-\frac{8x}{\pi}}-r^{\frac{8x}{\pi}}\right)\sin.8t+\text{etc.}:$$

par suite des propriétés des kappa circulaires, si l'on pose $\frac{\text{E}(b)}{\text{D}(b)}=j$, $\frac{\text{Q}'}{\text{P}'}=\Omega'$, la formule ($g$) pourra être remplacée par la suivante :

$$(g')\ldots\left\{\begin{aligned}&\frac{b^2\sin.\theta\cos.\theta}{\Delta(b,\theta)}[\text{kac.}(\theta,c,\varphi)-\text{dig.}(c,\varphi)]\\ =\ &\text{dig.}(c,\varphi)\,[j\,\text{dig.}(b,\theta)-\text{eps.}(b,\theta)]\\ &\qquad+\ \text{arc}(\text{tang.}=\Omega').\end{aligned}\right.$$

En effet, si l'on permute dans l'équation (g), les lettres θ et φ, b et c, les angles-limites x et t seront également permutés, et les fonctions q et i se changeront respectivement en r et en j. Il suffira, pour lors, de combiner le résultat de ces permutations avec la formule (e) du § 56, pour obtenir l'équation (g').

De la combinaison des formules (g) et (g') avec la relation entre les fonctions complètes (§ 60)

$$i+j-1=\frac{\pi}{2\text{D}(b).\text{D}(c)},$$

on déduit sur-le-champ

$$\text{arc tang.}(\Omega)+\text{arc tang.}(\Omega')+\frac{2tx}{\pi}=\text{arc tang.}\left(\frac{\Delta(b,\theta)}{\cot.\theta}\cdot\frac{\Delta(c,\varphi)}{\cot.\varphi}\right);$$

équation qui lie entre elles, d'une manière bien remarquable, les transcendantes Ω et Ω'.

§ 133. Soit maintenant T (*tau*) ou T (r, x) une fonction de r et de x ainsi exprimée

$$\text{T}(r,x)=1-r\left(r^{-\frac{2x}{\pi}}+r^{\frac{2x}{\pi}}\right)+r^4\left(r^{-\frac{4x}{\pi}}-r^{\frac{4x}{\pi}}\right)-r^9\left(r^{-\frac{6x}{\pi}}+r^{\frac{6x}{\pi}}\right)+\text{etc.}:$$

si l'on suppose θ infiniment petit dans les deux membres de l'équation (g'), et que l'on désigne par ω' ce que devient Ω' par cette hypothèse, on aura

$$(33)\ldots\quad b^2\theta\,[\text{kap.}(-1,c,\varphi)-\text{dig.}\varphi]=\theta(j-1)\,\text{dig.}\varphi+\omega';$$

équation dans laquelle le premier membre se réduit à

$$b^2\theta\left(-\frac{1}{b^2}\,\text{eps.}\varphi+\frac{1}{b^2}\,\Delta\,\text{tang.}\varphi\right)\ (\S\,43).$$

Quant au second, l'angle-limite t étant aussi infiniment petit, tous les sinus qui entrent dans l'expression de Ω' se réduisent à leurs arcs,

et les cosinus à l'unité : de manière qu'il vient pour ω',

$$\omega' = 2t.\frac{r\left(r^{-\frac{2x}{\pi}} - r^{\frac{2x}{\pi}}\right) - 2r^4\left(r^{-\frac{4x}{\pi}} - r^{\frac{4x}{\pi}}\right) + 3r^9\left(r^{-\frac{6x}{\pi}} - r^{\frac{6x}{\pi}}\right) + \text{etc.}}{1 - r\left(r^{-\frac{2x}{\pi}} + r^{\frac{2x}{\pi}}\right) + r^4\left(r^{-\frac{4x}{\pi}} + r^{\frac{4x}{\pi}}\right) - r^9\left(r^{-\frac{6x}{\pi}} + r^{\frac{6x}{\pi}}\right) + \text{etc.}};$$

d'où

$$\omega' = \frac{\pi t}{\log.r}.\frac{dT}{Tdx} = -t\frac{D(b)}{D(c)}.\frac{dT}{Tdx},$$

et, en vertu de l'équation $\theta = \text{dig.}(b, \theta) = \frac{2D(b)}{\pi}t$, l'on obtient

$$\omega' = -\frac{\pi\theta}{2D(c)}.\frac{dT}{Tdx}.$$

Cette expression étant substituée dans l'équation (33), il reste, après avoir supprimé le facteur commun θ,

$$(34). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\pi}{2D}.\frac{dT}{Tdx} = \text{eps.}\varphi + (j-1)\,\text{dig.}\varphi - \Delta\,\text{tang.}\varphi;$$

d'où l'on tire

$$(35). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{eps.}\varphi = \Delta\,\text{tang.}\varphi + \left[1 - \frac{E(b)}{D(b)}\right]\text{dig.}\varphi$$

$$-\frac{\pi}{D(b)}.\frac{r\left(r^{-\frac{2x}{\pi}} - r^{\frac{2x}{\pi}}\right) - 2r^4\left(r^{-\frac{4x}{\pi}} - r^{\frac{4x}{\pi}}\right) + 3r^9\left(r^{-\frac{6x}{\pi}} - r^{\frac{6x}{\pi}}\right) - \text{etc.}}{1 - r\left(r^{-\frac{2x}{\pi}} + r^{\frac{2x}{\pi}}\right) + r^4\left(r^{-\frac{4x}{\pi}} + r^{\frac{4x}{\pi}}\right) - r^9\left(r^{-\frac{6x}{\pi}} + r^{\frac{6x}{\pi}}\right) + \text{etc.}}.$$

Si l'on multiplie tous les termes de l'équation (34), par $\frac{2Ddx}{\pi}$ ou par son équivalent $\frac{d\varphi}{\Delta}$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{dT}{T} = \text{eps.}\varphi.\frac{d\varphi}{\Delta} + (j-1)\,\text{dig.}\varphi.\frac{d\varphi}{\Delta} - \frac{\sin.\varphi\, d\varphi}{\cos.\varphi},$$

dont l'intégrale est

$$\log.T = \Upsilon(\varphi) + \tfrac{1}{2}(j-1)\,\text{dig.}^2\varphi + \log.\cos.\varphi + \text{const.}:$$

si l'on fait, pour un instant, $\varphi = 0$, on trouve pour valeur de la constante (§ 127),

$$\log.(1 - 2r + 2r^4 - 2r^9 + \text{etc.}) = \log.\sqrt{\frac{2c\,\mathrm{D}(b)}{\pi}},$$

et l'équation précédente devient

$$(36) \ldots\ldots \log.\mathrm{T} = \Upsilon(\varphi) + \tfrac{1}{2}(j-1)\,\mathrm{dig.}^2\varphi + \log.\cos.\varphi + \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{2c\mathrm{D}(b)}{\pi}\right);$$

d'où l'on déduit pour $\Upsilon(\varphi)$ cette expression remarquable

$$(h) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Upsilon(\varphi) =$$

$$\log.\left[1 - r\left(r^{-\frac{2x}{\pi}} + r^{\frac{2x}{\pi}}\right) + r^4\left(r^{-\frac{4x}{\pi}} + r^{\frac{4x}{\pi}}\right) - r^9\left(r^{-\frac{6x}{\pi}} + r^{\frac{6x}{\pi}}\right) + \text{etc.}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{\mathrm{E}(b)}{\mathrm{D}(b)}\right]\mathrm{dig.}^2\varphi - \log.\cos.\varphi - \tfrac{1}{2}\log.\left(\frac{2c\,\mathrm{D}(b)}{\pi}\right).$$

§ 134. Nous avons déjà fait observer au § 131, que l'on peut résoudre au moyen de la fonction Θ, le même problème dont la solution nous a été fournie par la transcendante Υ. C'est qu'en effet ces deux fonctions se déduisent aisément l'une de l'autre. Pour le prouver, nous remarquerons que si, dans l'équation (32) du § 130, on remet au lieu de $\frac{2\mathrm{D}dx}{\pi}$ et de i leurs valeurs $\frac{d\varphi}{\Delta}$ et $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}$, l'intégration donne, après avoir déterminé la constante comme pour la fonction T,

$$(37) \ldots \quad \log.\Theta(q, x) = \Upsilon(\varphi) - \frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{D}}\,\mathrm{dig.}^2\varphi + \tfrac{1}{2}\log.\frac{2b\mathrm{D}}{\pi};$$

d'où

$$(h') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Upsilon(\varphi) =$$

$$\log.(1 - 2q\cos.2x + 2q^4\cos.4x - 2q^9\cos.6x + 2q^{16}\cos.8x - \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\,\mathrm{dig.}^2\varphi - \tfrac{1}{2}\log.\frac{2b\mathrm{D}}{\pi}.$$

La combinaison des formules (36) et (37), donne le résultat suivant :

$$\log.\mathrm{T}(r, x) = \log.\Theta(q, x) + \log.\cos.\varphi + \frac{\pi\,\mathrm{dig.}^2\varphi}{4\mathrm{D}(b)\mathrm{D}(c)} + \tfrac{1}{2}\log.\frac{c\mathrm{D}(b)}{b\mathrm{D}(c)}:$$

si, dans cette équation, on remplace cos.φ par sa valeur en $\Theta(q, x)$ et $\Lambda(q, x+\frac{1}{2}\pi)$ (§ 125), on obtiendra

$$T(r, x) = \sqrt{\frac{D(b)}{D(c)}}\, r^{-\frac{x^2}{\pi^2}}\, \Lambda(q, x+\tfrac{1}{2}\pi),$$

ou, en permutant b et c dans les deux membres,

$$T(q, x) = \sqrt{\frac{D(c)}{D(b)}}\, r^{-\frac{x^2}{\pi^2}}\, \Lambda(r, x+\tfrac{1}{2}\pi);$$

expression assez simple de la transcendante T au moyen de Λ.

CHAPITRE XIV.

Méthode des nomes.

§ 135. Le rôle important que joue la transcendante auxiliaire q, dans la théorie des fonctions elliptiques, et l'extrême convergence des séries qui procèdent suivant ses puissances, ont engagé Legendre à la prendre pour base d'une méthode d'approximation, qui nous paraît être la plus expéditive de toutes, pour le calcul des transcendantes elliptiques. Ses éléments sont : 1° le module ; 2° l'amplitude ; 3° les fonctions complètes $D(c)$ et $D(b)$; 4° la fonction q. La grandeur de l'approximation dépend presqu'uniquement de cette dernière transcendante, dont un jeune géomètre belge, M. Loxhay, a calculé une table, d'après nos indications. Cette table, que nous avons placée à la fin de cet ouvrage, est construite au moyen de celle de Legendre pour les fonctions complètes. Elle a également douze et quatorze décimales, et procède par dixième de degré, depuis zéro jusqu'à 45°. Il est inutile de dépasser cette limite, à cause de la propriété suivante :

Soit θ l'angle du module, censé plus grand que 45° : en désignant par r, ce que devient q quand le module se change en son complément, on a

$$\log.\frac{1}{q} = \pi\frac{D(b)}{D(c)},$$

$$\log.\frac{1}{r} = \pi\frac{D(c)}{D(b)},$$

et, par conséquent,

$$\log.\log.\frac{1}{q} + \log.\log.\frac{1}{r} = 2\log.\pi.$$

En dénotant par log.' les logarithmes vulgaires, et par M le nombre 0.43429....., qui sert à convertir les logarithmes népériens en logarithmes vulgaires, cette formule devient

$$\log.'\log.'\frac{1}{q} + \log.'\log.'\frac{1}{r} = 2(\log.'\pi + \log.'M)$$
$$= 0.26986\ 83679\ 89342 :$$

ainsi l'on voit que q et r se déduisent facilement l'un de l'autre. Lorsque $q = r$, on a $q = \frac{1}{23.14}$, à peu près : il y a donc toujours un des deux nombres q et r, au-dessous de cette fraction.

Si l'on prend $q = 0.1$ et $c = \sin.\theta$, la table précitée fait voir, que cette valeur de q répond à un angle du module, compris entre $\theta = 63°.6$ et $\theta = 63°.7$: ainsi, jusqu'à la limite $\theta = 63°.6$ inclusivement, on a $q < 0.1$.

Pour abréger le discours, et l'énonciation des propriétés de la fonction q, nous appellerons cette fonction le *nome* (*) : l'angle θ, qui sert d'argument commun à q et au module c, sera dit *l'angle du nome*, et la fonction r portera le nom de *complément du nome*, ou de *nome complémentaire*. La méthode qui a pour objet l'évaluation des fonctions elliptiques au moyen de la transcendante q, pourra s'appeler la *méthode des nomes*.

§ 136. Soient les équations

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p = \text{dig.}(c, \varphi) = \frac{2D(c)}{\pi} x,$$

$$p_{,} = \text{dig.}(c_{,}, \varphi_{,}) = \frac{2}{1 + c_{,}} \cdot \frac{2D(c)}{\pi} x,$$

x désignant toujours l'angle-limite : si l'on remplace dans la dernière, $D(c)$ par sa valeur $(1 + c_{,})D(c_{,})$, il vient

$$\text{dig.}(c_{,}, \varphi_{,}) = \frac{2D(c_{,})}{\pi} 2x;$$

équation dans laquelle on remarquera, que le second membre est composé en $c_{,}$ et en $2x$, comme le second membre de l'équation (1)

(*) Du mot grec νόμος, *loi*.

l'est en c et en x. Or, nous avons déjà vu au § 127, que changer c en $c_{,}$, c'est changer q en q^2 : il suit donc de la remarque précédente, que *si dans une égalité, on a d'une part des fonctions de* c *et de* p, *et de l'autre des fonctions de* q *et de* x, *on pourra changer simultanément* c *en* c, *et* p *en* p,, *pourvu qu'on change* q *en* q^2 *et* x *en* 2x. A l'aide de cette règle, il sera facile de trouver l'expression en q et en x, d'une fonction quelconque $F(c_{,}, p_{,})$, si l'on sait comment la fonction primitive $F(c, p)$ est exprimée au moyen de ces mêmes quantités.

§ 137. Puisque la fonction Θ constitue, en quelque sorte, la dernière expression des kappa logarithmiques, on peut demander quelle modification il faut faire subir aux éléments q et x de cette transcendante, quand on veut passer de la fonction kal. (λ, c, φ) à sa transformée kal. $(\lambda_{,}, c_{,}, \varphi_{,})$. Pour répondre à cette question, nous poserons

$$\text{dig.}(c, \varphi) = \frac{2D(c)}{\pi} x, \quad \text{dig.}(c, \lambda) = \frac{2D(c)}{\pi} l,$$

puis, nous écrirons l'identité

$$\text{kal.}(\lambda, c, \varphi) = \text{kal.}\left[\text{amp.}\left(\frac{2D}{\pi} l\right), c, \text{amp.}\frac{2D}{\pi} x\right]:$$

comme, dans la transformée, l'angle $\lambda_{,}$ du paramètre se déduit de λ suivant la même loi que l'amplitude $\varphi_{,}$ se déduit de φ (§ 100), nous aurons

$$\text{kal.}(\lambda_{,}, c_{,}, \varphi_{,}) = \text{kal.}\left[\text{amp.}\left(\frac{2D(c_{,})}{\pi} 2l\right), c_{,}, \text{amp.}\left(\frac{2D(c_{,})}{\pi} 2x\right)\right];$$

par où l'on voit qu'il faudra changer q en q^2, et x et l en $2x$ et $2l$, dans le second membre de la formule (e) du § 130, pour qu'il soit égal à la valeur que prend le premier membre, lorsqu'on y change c, φ et λ, en $c_{,}$, $\varphi_{,}$ et $\lambda_{,}$.

Une modification analogue a lieu pour la transcendante Ω, considérée dans ses rapports avec les kappa circulaires. Nous avons vu au § 105, que lorsqu'on passe de la fonction kap.$(c^2 \text{ tang.}^2\theta, c, \varphi)$ à sa transformée kap. $(c_{,}^2 \text{ tang.}^2\mu, c_{,}, \varphi_{,})$, l'angle μ se déduit de l'angle θ au moyen de l'équation

$$\text{dig.}(b, \theta) = \frac{1 + c_{,}}{2} \text{dig.}(b_{,}, \mu):$$

or, en posant $\text{dig.}(b, \theta) = \frac{2D(b)}{\pi} t$, cette équation revient à

$$\text{dig.}(b_{,}, \mu) = (1 + b)\frac{2D(b)}{\pi} t;$$

et si l'on remarque que l'on a, entre le module $b_{,}$ et le module plus petit b, la relation $D(b_{,}) = (1 + b)D(b)$, on obtient

$$\text{dig.}(b_{,}, \mu) = \frac{2D(b_{,})}{\pi} t;$$

ce qui est la valeur de $\text{dig.}(b, \theta)$, au changement près de b en $b_{,}$. Ayant donc écrit

$$\text{kap.}(c^2\text{tang.}^2\theta, c, \varphi) =$$

$$\text{kap.}\left[c^2 \text{tang.}^2 \text{amp.}\left(\frac{2D(b)}{\pi} t\right), c, \text{amp.}\left(\frac{2D(c)}{\pi} x\right)\right],$$

on aura

$$\text{kap.}(c_{,}^2 \text{tang.}^2\mu, c_{,}, \varphi_{,}) =$$

$$\text{kap.}\left[c_{,}^2 \text{tang.}^2 \text{amp.}\left(\frac{2D(b_{,})}{\pi} t\right), c_{,}, \text{amp.}\left(\frac{2D(c_{,})}{\pi} 2x\right)\right]:$$

ainsi, en changeant q en q^2 et x en $2x$ dans la fonction Ω, mais sans changer t en $2t$, on passera de la fonction de θ, de c et de φ qu'exprime le premier membre de l'équation (f) du § 131, à la fonction semblablement composée en μ, $c_{,}$ et $\varphi_{,}$.

On peut considérer l'invariabilité de l'angle-limite t, que nous venons de signaler, comme l'expression transcendante de la loi de dérivation mentionnée au § 105; loi qui paraît avoir échappé à la sagacité de l'illustre auteur du *Traité des fonctions elliptiques*, malgré la facilité avec laquelle on y parvient, à l'aide de la transformation imaginaire qui lui a fait découvrir la transcendante Ω.

§ 138. Dans les diverses formules d'approximation qui vont suivre, l'inconnue est donnée par une équation de la forme

$$x = A(1 + \delta),$$

A étant la valeur approchée de x, et $A\delta$ *l'erreur absolue*. Ordinairement, ce qu'il importe le plus d'obtenir, c'est *l'erreur relative*, qui a pour expression $\frac{A\delta}{x}$, c'est-à-dire $\frac{\delta}{1+\delta}$. Cette quantité ne différant de δ que d'une fraction de l'ordre δ^2, que nous supposerons négligeable, on pourra regarder δ comme la mesure de l'erreur relative.

Bien que les tables de Legendre donnent les fonctions complètes D et E, avec un haut degré de précision, nous allons faire connaître plusieurs formules, qui serviront à résoudre le problème suivant :

Étant donné un module quelconque c, *assigner la valeur des fonctions D et E, avec un grand nombre de décimales exactes, et donner la mesure de l'approximation.*

Les formules dont il s'agit, se déduisent des deux suivantes, que nous avons démontrées au § 127, et qu'on peut regarder comme fondamentales :

$$(2) \ldots\ldots 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\text{etc.}=\sqrt{\frac{2D}{\pi}},$$

$$(3) \ldots\ldots 1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\text{etc.}=\sqrt{b}\sqrt{\frac{2D}{\pi}}.$$

La somme et la différence de celles-ci donnent

$$(4) \ldots\ldots 1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+\text{etc.}=\frac{1+\sqrt{b}}{2}\sqrt{\frac{2D}{\pi}},$$

$$(5) \ldots\ldots q+q^9+q^{25}+q^{49}+\text{etc.}=\frac{1-\sqrt{b}}{4}\sqrt{\frac{2D}{\pi}}.$$

Si l'on change dans l'équation (3), c en $c_{,,}$, et, par conséquent, q en q^4, il vient, en remplaçant $c_{,,}$ et $D(c_{,,})$, par leurs valeurs en fonction de c et de D,

$$(6) \ldots 1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+\text{etc.}=\sqrt[4]{\frac{(1+b)\sqrt{b}}{2}}\sqrt{\frac{2D}{\pi}}.$$

En faisant la somme des séries (4) et (6), on obtient

$$(7) \ldots\ldots 2+4q^{16}+\text{etc.}=\sqrt{\frac{2D}{\pi}}\left(\frac{1+\sqrt{b}}{2}+\sqrt[4]{\frac{(1+b)\sqrt{b}}{2}}\right):$$

désignant par ζ le coefficient de $\sqrt{\left(\frac{2D}{\pi}\right)}$, nous aurons

$$2+4q^{16}+\text{etc.}=\zeta\sqrt{\frac{2D}{\pi}};$$

d'où

$$D=\frac{2\pi}{\zeta^2}(1+4q^{16}+\text{etc.}).$$

On se formera une idée de la hauteur de cette approximation, si l'on remarque que pour $c = \sin. 45°$, on a

$$\log. \text{vulg.}\, q = \overline{2}.635635$$

et, par conséquent,

$$\log. \text{vulg.}\, 4q^{16} = \overline{22}.772220 :$$

ainsi, l'erreur relative a pour mesure une fraction décimale, dont le premier chiffre significatif est précédé de *vingt-deux* zéros.

Lorsque $c = \sin. 63°.6$, on a $4q^{16} < 0.00000\ 00000\ 00000\ 4$ (§ 135); mais dans le cas où c est très-voisin de l'unité, la formule précédente cesse d'être applicable. On s'en servira alors, pour calculer le digamma complet du module complémentaire, et l'on aura recours à la série (5) pour déterminer le nome complémentaire r. Cette série donne, en changeant q en r et b en c,

$$r + r^9 + \text{etc.} = \frac{1-\sqrt{c}}{4}\sqrt{\frac{2D(b)}{\pi}} :$$

dénotant par ω le second membre de cette équation, et remplaçant r par sa valeur en $D(c)$ et $D(b)$, on a

$$D(c) = \frac{D(b)}{\pi}\log.\left(\frac{1}{\omega - r^9 - \text{etc.}}\right) = \frac{D(b)}{\pi}\left[\log.\frac{1}{\omega} - \log.\left(1 - \frac{r^9 + \text{etc.}}{\omega}\right)\right].$$

Mais $\frac{r^9 + \text{etc.}}{\omega}$ étant une fraction très-petite, on peut prendre

$$\log.\left(1 - \frac{r^9 + \text{etc.}}{\omega}\right) = -\frac{r^9}{\omega};$$

d'où

$$D(c) = \frac{D(b)}{\pi}\left[\log.\frac{1}{\omega} + \frac{r^9}{\omega}\right] = \frac{D(b)}{\pi}\log.\frac{1}{\omega}.\left(1 + \frac{r^9}{\omega\log.\frac{1}{\omega}}\right) :$$

substituant à ω sa valeur $r + r^9 +$ etc., l'erreur δ aura pour valeur, le rapport $r^9 : (r + r^9)\log.\left(\frac{1}{r+r^9}\right)$, ou $r^8 : (1 + r^8)\log.\left(\frac{1}{r+r^8}\right)$, c'est-à-dire qu'elle sera au plus de l'ordre r^9.

La formule que nous venons de trouver, servira à calculer les digamma complets, depuis $c = \sin. 63°.6$ jusqu'à $c = 1$. Pour $c = \sin. 63°.6$, on a $\log. \text{vulg.}\, r = \overline{2}.13873$, et, par conséquent, $\log. \text{vulg.}\, r^9 = \overline{17}.24857$; ce qui donne la mesure de l'erreur.

§ 139. La différentiation des diverses séries mentionnées au § précédent, en produit une infinité d'autres, au moyen de la relation

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dq}{q} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{b^2 D^2} \cdot \frac{dc}{c},$$

que nous allons démontrer.

Posons, pour abréger,

$$D(b) = D', \quad E(b) = E' :$$

la différentiation de la transcendante q, donne immédiatement

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D'\frac{dD}{dc} - D\frac{dD'}{dc} = \frac{D^2}{\pi q} \cdot \frac{dq}{dc}.$$

Mais, d'après le § 70, on a

$$E = b^2 D - bc^2 \frac{dD}{db},$$

et, par conséquent, en permutant b et c,

$$E' = c^2 D' - b^2 c \frac{dD'}{dc}.$$

On tire de ces deux équations, en remarquant que $\frac{db}{dc} = -\frac{c}{b}$,

$$\frac{dD'}{dc} = \frac{c^2 D' - E'}{b^2 c},$$

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dD}{dc} = \frac{dD}{db} \cdot \frac{db}{dc} = -\frac{b^2 D - E}{b^2 c} :$$

substituant ces valeurs dans l'équation (9), on obtient

$$\frac{1}{b^2 c}(ED' + E'D - DD') = \frac{D^2}{\pi q} \cdot \frac{dq}{dc};$$

ce qui devient la relation (8), en vertu de l'équation (11) du § 60 (*).

(*) Legendre donne la relation (8), dans le deuxième supplément de son *Traité*, page 110; mais il a écrit par erreur $-\pi$, au lieu de $+\pi^2$. Il y a aussi dans la 18me formule de la même page, $(2kk')^{\frac{1}{2}}$ au lieu de $(2kk')^{\frac{1}{6}}$; ce qui rend fautives les deux formules suivantes qui s'en déduisent.

Cette relation, appliquée aux formules (2) et (3), donne respectivement, par sa combinaison avec l'équation (10),

$$q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \text{etc.} = \frac{D}{2\pi^2}(E - b^2D)\sqrt{\frac{2D}{\pi}},$$

$$q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \text{etc.} = \frac{D(D - E)}{2\pi^2}\sqrt{\frac{2Db}{\pi}};$$

d'où

$$q + 9q^9 + 25q^{25} + \text{etc.} = \frac{D}{4\pi^2}\sqrt{\frac{2D}{\pi}}[E(1 - \sqrt{b}) + (\sqrt{b} - b^2)D].$$

En retranchant de cette série l'équation (5), et en posant, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{2D}{\pi}} = \alpha, \quad 1 - \sqrt{b} = \beta, \quad \sqrt{b} - b^2 = \gamma,$$

on trouvera ce résultat :

$$8q^9 + \text{etc.} = \frac{\alpha^3}{8\pi}\left[\beta E + \frac{\pi\alpha^2\gamma}{2}\right] - \frac{\alpha\beta}{4};$$

d'où l'on tirera, pour expression de l'epsilon complet,

$$(11) \quad . \quad . \quad E = \frac{\pi(4\beta - \alpha^4\gamma)}{2\alpha^2\beta}\left[1 + \frac{16}{\alpha} \cdot \frac{8q^9 + \text{etc.}}{4\beta - \alpha^4\gamma}\right].$$

Le terme $8q^9$ étant divisé par un binome qui s'évanouit avec q, il est assez difficile d'évaluer *a priori* l'approximation que donne la formule (11). On peut, cependant, assigner la limite vers laquelle converge l'erreur, à mesure que le nome devient plus petit. Remarquons, à cet effet, que le développement de α suivant les puissances de q, est donné par la formule (2): quant au module complémentaire, qui entre dans la valeur de β et de γ, si l'on fait $x = 0$ dans l'expression de Δ rapportée au § 125, on trouvera

$$\sqrt{b} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \text{etc.}}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \text{etc.}}.$$

Supposons, maintenant, que l'on prenne q assez petit, pour qu'on puisse négliger toutes ses puissances supérieures à la première,

dans α et dans $4\mathcal{C} - \alpha^4\gamma$: on aura, avec une exactitude suffisante,

$$\sqrt{b} = 1 - 4q, \quad \alpha = 1 + 2q;$$

et par suite, en faisant toutes les substitutions et réductions nécessaires,

$$\frac{128}{\alpha(4\mathcal{C} - \alpha^4\gamma)} = \frac{32}{q};$$

ce qui donne le résultat connu : $E = \frac{\pi}{2}$, lorsqu'on fait $q = 0$, après la suppression des facteurs communs. Ainsi, l'erreur de la formule (11) pourra être représentée, en général, par une quantité de la forme ωq^8, ω ayant pour valeur particulière 32, lorsque $q = 0$. Pour avoir une autre valeur de ω, nous avons pris $c = \sin.45°$: en faisant le calcul, nous avons trouvé

$$\log.\text{vulg.}\left(\frac{128}{4\alpha\mathcal{C} - \alpha^5\gamma}\right) = \overline{10}.5838023;$$

d'où nous avons conclu pour ω, la valeur 31.53 : on peut donc prendre, en toute sûreté, $32q^8$ pour mesure de l'erreur, quelle que soit la grandeur du nome.

Si le module était très-voisin de l'unité, on se servirait de notre formule pour calculer $E(b)$, afin de conclure $E(c)$ de $E(b)$, au moyen de la relation (11) du § 60.

§ 140. En combinant l'emploi des formules que nous venons de trouver, avec la méthode des modules décroissants, on obtiendra une approximation extrêmement rapide et illimitée. L'erreur de la formule précédente, par exemple, étant de l'ordre $32q^8$, quand il s'agit du module c, elle ne sera que de l'ordre $32q^{16}$, pour le module $c_{,}$. En général, chaque transformation modulaire doublera, au moins, le nombre des décimales exactes. Dans le cas particulier de $E(\sin.45°)$, la transformation de $E(c)$ en $E(c_{,})$ permet de calculer la fonction proposée, avec *vingt* décimales exactes : une transformation de plus en donnerait au moins *quarante et une.*

§ 141. L'application de la méthode des nomes au calcul des transcendantes eps. φ, kal.(θ, c, φ), kac.(θ, c, φ), exige que l'on considère séparément le cas où le module est très-voisin de l'unité. C'est pour-

quoi, nous avons eu soin de joindre aux développements des transcendantes cherchées, suivant les puissances du nome, des séries qui procèdent suivant les puissances de son complément. Veut-on calculer, par exemple, l'epsilon incomplet? Si le module n'est pas trop grand, on pourra choisir entre les formules (27) et (28) du § 129 : si le module est voisin de l'unité, on emploiera la formule (35) du § 133. S'il s'agit d'un kappa logarithmique, on le réduira à deux upsilon que l'on calculera, soit par la formule (29) du § 129, soit par la formule (h') du § 134; soit encore par la formule (h) du § 133, si le module est voisin de l'unité. Quant aux kappa circulaires, les formules (g) et (g') du § 132, sont vraisemblablement ce que l'analyse peut offrir de plus parfait pour leur approximation (*).

(*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, 2me supplément, page 152.

CHAPITRE XV.

Usage et construction des tables elliptiques.

§ 142. La construction et l'usage des tables elliptiques, exigeant l'emploi du *calcul des différences*, nous allons donner quelques notions de ce calcul, que nous emprunterons au grand traité de calcul différentiel de M. Lacroix.

Soit

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ u_n,$$

une série de valeurs consécutives que reçoit une quantité, en vertu des variations qu'elle éprouve par elle-même, ou par l'effet de celles qui arrivent à une autre dont elle dépend : les chiffres inférieurs sont ici des indices, qui font connaître le rang qu'occupe chaque valeur dans la série, en marquant le nombre de celles qui la précèdent ; en sorte que la première u_0, est censée répondre à l'indice 0. On fait ensuite

$$(1)\ \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} u_1 - u_0 = \Delta u_0, \\ u_2 - u_1 = \Delta u_1, \\ u_3 - u_2 = \Delta u_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}, \end{array} \right.$$

en se servant de la caractéristique Δ, pour indiquer l'opération de prendre la différence entre deux valeurs consécutives d'une même quantité.

Lorsque cette quantité varie par degrés égaux, les différences Δu_0, Δu_1, Δu_2, etc., sont toutes égales; mais si le contraire a lieu,

on fait, par analogie,

$$(2)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}
\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta\Delta u_0 = \Delta^2 u_0\,,\\
\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta\Delta u_1 = \Delta^2 u_1\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta\Delta_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1}\,,\\
\\
\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = \Delta\Delta^2 u_0 = \Delta^3 u_0\,,\\
\Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = \Delta\Delta^2 u_1 = \Delta^3 u_1\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n-1} = \Delta\Delta^2 u_{n-1} = \Delta^3 u_{n-1}\,,\\
\\
\text{etc.}
\end{array}\right.$$

En examinant la marche de la série formée par une puissance quelconque de la suite des nombres naturels, on tombe déjà sur une propriété remarquable des différences, ainsi que le montre le tableau des *cubes* ci-dessous :

CUBES.	DIFFÉRENCES 1res.	DIFFÉRENCES 2des.	DIFFÉRENCES 3mes.
1			
	7		
8		12	
	19		6
27		18	
	37		6
64		24	
	61		6
125		30	
	91		6
216		36	
	127		etc
343		etc.	
	etc.		
etc.			

La première colonne représente les fonctions u_0, u_1, u_2, etc.; la seconde les *différences premières* Δu_0, Δu_1, Δu_2, etc.; la troisième les *différences secondes* $\Delta^2 u_0$, $\Delta^2 u_1$, etc.; et ainsi de suite.

Remarquons que, dans cet exemple, les différences troisièmes sont constantes. En général, la différence de l'ordre n de la n^{me} puissance d'une variable indépendante x, est constante et égale à $1.2.3\ldots n$.

On démontre même que toute fonction rationnelle et entière de x, a toujours une différence constante, savoir celle de l'ordre marqué par la plus haute puissance de x.

Des équations (1) et (2) on tire, par des substitutions faciles,

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0,$$
$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$$
$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,$$
etc.;

d'où l'on conclut généralement

$$(3) \ldots\ldots u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\Delta^3 u_0 + \text{etc.};$$

ce qu'on peut vérifier aisément au moyen de l'équation

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,$$

qui donne, en remplaçant u_n par sa valeur fournie par l'équation (3),

$$u_{n+1} = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \text{etc.}$$
$$+ \Delta u_0 + \frac{n}{1}\Delta^2 u_0 + \text{etc.}$$
$$= u_0 + \frac{n+1}{1}\Delta u_0 + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^2 u_0 + \text{etc.};$$

ce qui prouve que si la loi supposée a lieu pour l'indice n, elle aura également lieu pour l'indice $n+1$. Ainsi, cette loi ayant été observée pour les indices 1, 2, 3, elle s'étendra nécessairement à tous ceux qui les suivent.

§ 143. La formule (3) a pour objet principal *l'interpolation des suites;* opération qui consiste à insérer entre les termes d'une suite, de nouveaux termes assujettis à la même loi que les premiers. Insérer des moyens, par exemple, entre deux termes d'une progression par différences, ou d'une progression par quotients, c'est calculer des termes qui répondent à des valeurs fractionnaires de l'indice; c'est *interpoler*.

Le problème de l'interpolation revient, comme on le voit, à déterminer l'équation d'une courbe, par la seule condition de passer

par un certain nombre de points donnés; ce qui ne saurait s'effectuer complétement, à moins que la courbe ne soit donnée d'espèce, puisqu'on peut trouver des courbes très-différentes, qui se coupent en tel nombre de points que l'on voudra. Parmi toutes les courbes, celle dont l'équation se prête le plus facilement à la condition prémentionnée, est la parabole indéfinie, caractérisée par l'équation générale $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+$ etc.; et la théorie des osculations fait voir que cette courbe peut, dans un petit espace, approcher sensiblement d'une courbe quelconque, surtout lorsqu'il ne se trouve pas de points singuliers dans cet espace. Pour fixer les idées, nous prendrons un exemple dans les tables de logarithmes. Supposons que, par le moyen d'une table contenant les logarithmes depuis 1 jusqu'à 1000 avec dix décimales, on veuille avoir le logarithme vulgaire de 3.1415926536, nombre très-approchant du rapport de la circonférence au diamètre : on regardera alors les logarithmes contenus dans la table, comme les ordonnées d'une courbe parabolique, dont les abscisses seraient les nombres correspondants, comme dans le tableau ci-dessous :

$$(4)\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{ll} x_0=3.14, & y_0=0.4969296481, \\ x_1=3.15, & y_1=0.4983105538, \\ x_2=3.16, & y_2=0.4996870826, \\ x_3=3.17, & y_3=0.5010592622, \\ x_4=3.18, & y_4=0.5024271200. \end{array}\right.$$

Or, si l'on pose

$$(5)\quad\ldots\ldots\quad y=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4,$$

on aura, pour déterminer les coefficients α, β, γ, δ, ε, les cinq équations

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha+\beta x_0+\gamma x_0^2+\delta x_0^3+\varepsilon x_0^4, \\ y_1 &= \alpha+\beta x_1+\gamma x_1^2+\delta x_1^3+\varepsilon x_1^4, \\ y_2 &= \alpha+\beta x_2+\gamma x_2^2+\delta x_2^3+\varepsilon x_2^4, \\ y_3 &= \alpha+\beta x_3+\gamma x_3^2+\delta x_3^3+\varepsilon x_3^4, \\ y_4 &= \alpha+\beta x_4+\gamma x_4^2+\delta x_4^3+\varepsilon x_4^4: \end{aligned}$$

ces coefficients une fois connus, il suffira de remplacer x par sa valeur 3.1415926536, dans l'équation (5), pour trouver son loga-

rithme y, avec une exactitude d'autant plus grande, que cette équation contiendra un plus grand nombre de coefficients.

Nous allons faire voir, maintenant, comment la formule (3) peut remplacer, avec avantage, le procédé simple, mais laborieux, que nous venons d'indiquer. Soit $u = f(x)$ une équation entre les variables u et x, telle que u devient

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ldots\ u_n,$$

lorsque x se change en

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots\ldots\ldots\ x_0+nh:$$

on pourra regarder u_0, u_1, u_2, etc., comme les ordonnées $\overline{M_0P_0}$, $\overline{M_1P_1}$, $\overline{M_2P_2}$, etc., des n points isolés M_0, M_1, M_2,...M_n (*fig.* 8), dont les abscisses x_0, x_0+h, x_0+2h,....x_0+nh, seront représentées par $\overline{AP_0}$, $\overline{AP_1}$, $\overline{AP_2}$,...$\overline{AP_n}$. La relation entre l'ordonnée u_n d'un point isolé quelconque M_n, et u_0, sera exprimée par l'équation (3) en fonction de u_0, de l'indice n, et des différences $\overline{M_1H_1} = \Delta u_0$, $\overline{M_2H_2} - \overline{M_1H_1} = \Delta^2 u_0$, etc. Si nous posons

$$x_0 + nh = x' = \overline{AP_n},$$

il en résultera

$$nh = x' - x_0 = \overline{AP_n} - \overline{AP_0} = h';$$

d'où $n = \frac{h'}{h}$, et la formule (3) devient, en désignant u_n par u',

$$(6).\ u' = u_0 + \frac{h'}{h}\Delta u_0 + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u_0 + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u_0 + \text{etc.}$$

A la rigueur, elle ne convient qu'aux points tels que M_0, M_1, M_2, etc., pour lesquels $\frac{h'}{h}$ est un nombre entier; mais si l'on regarde u' comme une ordonnée générale, et $x' = x_0 + h'$, comme l'abscisse correspondante, l'équation (6) pourra être considérée comme celle d'une courbe continue $M_0 M_1 M_2$...., assujettie seulement à passer par les points M_0, M_1, M_2, etc., et, par conséquent, elle se vérifiera pour les valeurs fractionnaires de $\frac{h'}{h}$, qui correspondront à des points de la courbe, autres que M_0, M_1, M_2, etc. La courbe dont il s'agit est une parabole du degré n; car il est évident que l'équation (6) renfermant toutes les différences jusqu'à l'ordre n, cette équation est du n^{me} degré en h', et, par conséquent, du même degré en x'.

§ 144. Pour appliquer la formule (6) à l'exemple mentionné au § précédent, nous remarquerons que le tableau (4) donne

$$\Delta u_0 = +\ 0.0013809057\,,\quad \Delta^2 u_0 = -\ 0.0000043769\,,$$
$$\Delta^3 u_0 = +\ 0.0000000277\,,\quad \Delta^4 u_0 = -\ 0.0000000003\,;$$

et comme

$$h = 0.01\,,\quad h' = 0.0015926536\,,$$

on obtiendra

$$\frac{h'}{h} = 0.15926536\,,$$
$$\frac{h'-h}{2h} = \frac{h'}{2h} - \frac{1}{2} = -\ 0.42036732\,,$$
$$\frac{h'-2h}{3h} = \frac{h'}{3h} - \frac{2}{3} = -\ 0.61357821\,,$$
$$\frac{h'-3h}{4h} = \frac{h'}{4h} - \frac{3}{4} = -\ 0.71018366\,:$$

avec ces valeurs, on trouvera pour u',

$$u' = 0.4971498726.$$

Prenons un second exemple, qui nous sera fourni par les tables elliptiques. On trouve qu'à l'angle du module $\theta = 15^\circ$, répond le logarithme vulgaire de l'epsilon complet E,

$$\log.E = 0.\ 188\ 689\ 625\ 530\,,$$

et ces mêmes tables donnent, pour différences successives,

$$\Delta \log.\ E(15^\circ) = -\ 0.\ 000\ 099\ 238\ 552\,,$$
$$\Delta^2 \log.\ E(15^\circ) = +\ 0.\ 000\ 000\ 654\ 834\,,$$
$$\Delta^3 \log.\ E(15^\circ) = -\ 0.\ 000\ 000\ 000\ 101\,,$$

l'angle θ croissant par dixième de degré. Supposons que l'on veuille avoir le logarithme de l'epsilon complet correspondant à l'angle du module $\theta = 15^\circ\ 3' = 15^\circ.05$: nous ferons

$$h = \begin{cases} 0^\circ.1 \\ 0^\circ\ 6' \end{cases},\quad h' = \begin{cases} 0^\circ.05 \\ 0^\circ\ 3' \end{cases};$$

d'où

$$\frac{h'}{h} = +0.5, \quad \frac{h'}{h}\cdot\frac{h'-h}{2h} = -0.125, \quad \frac{h'}{h}\cdot\frac{h'-h}{2h}\cdot\frac{h'-2h}{3h} = +0.625,$$

$$\frac{h'}{h}\,\Delta\log.\,E(15^\circ) = -\,0.\ 000\ 049\ 619\ 276,$$

$$\frac{h'}{h}\cdot\frac{h'-h}{2h}\,\Delta^2\log.\,E(15^\circ) = +\,0.\ 000\ 000\ 081\ 854,$$

$$\frac{h'}{h}\cdot\frac{h'-h}{2h}\cdot\frac{h'-2h}{3h}\,\Delta^3\log.\,E(15^\circ) = -\,0.\ 000\ 000\ 000\ 000\ 625.$$

A retrancher de log. E(15°) = . . .	0. 188 689 625 530,
la quantité	0. 000 049 537 422,
il reste : log. E(15°,3′) = . . .	0. 188 640 088 108.

Ces exemples suffisent pour faire voir comment on interpole les tables à simple entrée.

§ 145. Les diverses valeurs que prend une fonction de deux variables, produisent un assemblage de séries, formant une table disposée comme celle que l'on attribue à Pythagore. Voici, pour exemple, une table qui résulte de la fonction

$$u = 5 + x^2 + 2xy + 3y^2.$$

Valeurs de x.

Valeurs de y.	0	1	2	3	4	etc.
0	5	6	9	14	21	etc.
1	8	11	16	23	32	etc.
2	17	22	29	38	49	etc.
3	32	39	48	59	72	etc.
4	53	62	73	86	101	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	

C'est là une *table à double entrée*, parce que pour en désigner un terme particulier, il faut donner le numéro de la colonne verticale qui le contient, et celui de la bande horizontale. Nous écrirons ces numéros, en indices au bas de la lettre désignant la fonction : ainsi $u_{m,n}$ dénotera l'état général d'une fonction de x et de y; $u_{0,0}$ la valeur qui répond à $x = x_0$, $y = y_0$; $u_{3,4}$ celle qui répond à $x = x_3$, $y = y_4$, etc.; ce qui produira le tableau suivant :

Valeurs de x.

Valeurs de y.	x_0	x_1	x_2	x_3	. . . . .	x_m
y_0	$u_{0,0}$	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$	$u_{3,0}$	. . . . .	$u_{m,0}$
y_1	$u_{0,1}$	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{3,1}$	. . . . .	$u_{m,1}$
y_2	$u_{0,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$	$u_{3,2}$	. . . . .	$u_{m,2}$
y_3	$u_{0,3}$	$u_{1,3}$	$u_{2,3}$	$u_{3,3}$	. . . . .	$u_{m,3}$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .		. . . . .
y_n	$u_{0,n}$	$u_{1,n}$	$u_{2,n}$	$u_{3,n}$	. . . . .	$u_{m,n}$

Considérée séparément, chaque bande et chaque colonne de ce tableau forme une série, dans laquelle le rang d'un terme quelconque ne dépend que d'un seul indice, savoir m pour les termes d'une même bande, et n pour ceux d'une même colonne. Les différences de ces termes se prennent donc comme à l'ordinaire; mais il faut distinguer celles que produit la variation d'un indice, de celles que

produit la variation de l'autre ; et pour cela, on écrit au bas de la caractéristique Δ, celui des indices qui varie. Ainsi

$$u_{m+1,n} - u_{m,n} = \Delta_m u_{m,n}, \quad \Delta_m u_{m+1,n} - \Delta_m u_{m,n} = \Delta_m^2 u_{m,n}, \text{ etc. ;}$$
$$u_{m,n+1} - u_{m,n} = \Delta_n u_{m,n}, \quad \Delta_n u_{m,n+1} - \Delta_n u_{m,n} = \Delta_n^2 u_{m,n}, \text{ etc.}$$

Si dans la formule (3), on change n en m, et qu'on écrive $u_{0,0}$ à la place de u_0, on obtiendra

$$u_{m,0} = u_{0,0} + \frac{m}{1}\Delta_m u_{0,0} + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta_m^2 u_{0,0} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta_m^3 u_{0,0} + \text{etc.}$$

Pour étendre ce résultat à telle bande horizontale qu'on voudra, il suffira de substituer au second zéro qui tient la place de n, le numéro de la bande. On exprimera, par exemple, $u_{m,3}$ au moyen des quantités $u_{0,3}$, $\Delta_m u_{0,3}$, $\Delta_m^2 u_{0,3}$, etc., relatives à la quatrième bande ; et, dans une bande quelconque, on aura

$$u_{m,n} = u_{0,n} + \frac{m}{1}\Delta_m u_{0,n} + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta_m^2 u_{0,n} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta_m^3 u_{0,n} + \text{etc.}$$

Mais, en considérant à part la série des valeurs contenues dans la première colonne, on aura aussi

$$u_{0,n} = u_{0,0} + \frac{n}{1}\Delta_n u_{0,0} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta_n^2 u_{0,0} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta_n^3 u_{0,0} + \text{etc. ;}$$

et, si l'on substitue cette valeur de $u_{0,n}$ dans l'équation qui précède, on tombera sur les expressions

$$\Delta_m(\Delta_n u_{0,0}), \quad \Delta_m^2(\Delta_n u_{0,0}), \quad \ldots\ldots : \quad \Delta_m^p(\Delta_n^q u_{0,0}),$$

dont la dernière dénote q différentiations par Δ, relatives à l'indice n, suivies de p différentiations relatives à l'indice m, et peut être abrégée en l'écrivant sous la forme $\Delta_{m,n}^{p+q} u_{0,0}$: au moyen de quoi il vient

$$(7)\left\{\begin{aligned} u_{m,n} = u_{0,0} &+ \frac{m}{1}\Delta_m u_{0,0} + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta_m^2 u_{0,0} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta_m^3 u_{0,0} + \text{etc.} \\ &+ \frac{n}{1}\Delta_n u_{0,0} + \frac{mn}{1.1}\Delta_{m,n}^{1+1} u_{0,0} + \frac{m(m-1)n}{1.2.1}\Delta_{m,n}^{2+1} u_{0,0} + \text{etc.} \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta_n^2 u_{0,0} + \frac{n(n-1)m}{1.2.1}\Delta_{m,n}^{1+2} u_{0,0} + \text{etc.} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta_n^3 u_{0,0} + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.;} \end{aligned}\right.$$

formule qui exprime le terme général de la table, par le premier terme $u_{0,0}$ et ses différences partielles, qui se forment de la manière suivante :

Les termes du tableau, considérés dans chaque bande en particulier (c'est-à-dire pour une même valeur de n), donneront, par le procédé qui nous a fourni le tableau relatif aux cubes (§ 142), les nouvelles séries

$$(8).\quad \begin{cases} u_{0,0}, & \Delta_m u_{0,0}, & \Delta_m^2 u_{0,0}, & \Delta_m^3 u_{0,0}, \text{ etc., répondant à } n=0; \\ u_{0,1}, & \Delta_m u_{0,1}, & \Delta_m^2 u_{0,1}, & \Delta_m^3 u_{0,1}, \text{ etc., } \ldots\ldots\ldots\ldots n=1; \\ u_{0,2}, & \Delta_m u_{0,2}, & \Delta_m^2 u_{0,2}, & \Delta_m^3 u_{0,2}, \text{ etc., } \ldots\ldots\ldots\ldots n=2; \\ u_{0,3}, & \Delta_m u_{0,3}, & \Delta_m^2 u_{0,3}, & \Delta_m^3 u_{0,3}, \text{ etc., } \ldots\ldots\ldots\ldots n=3; \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on retranche maintenant la première de ces séries, répondant à $n=0$, de la deuxième, qui répond à $n=1$; puis celle-ci de la troisième, et ainsi de suite, il est clair que les restes exprimeront des différences par rapport à n, et qu'on aura, suivant la notation établie,

$$(9).\quad \begin{cases} \Delta_n u_{0,0}, & \Delta_{m,n}^{1+1} u_{0,0}, & \Delta_{m,n}^{2+1} u_{0,0}, \text{ etc., répondant à } n=0; \\ \Delta_n u_{0,1}, & \Delta_{m,n}^{1+1} u_{0,1}, & \Delta_{m,n}^{2+1} u_{0,1}, \text{ etc., } \ldots\ldots\ldots\ldots n=1; \\ \Delta_n u_{0,2}, & \Delta_{m,n}^{1+1} u_{0,1}, & \Delta_{m,n}^{2+1} u_{0,2}, \text{ etc., } \ldots\ldots\ldots\ldots n=2; \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Retranchant encore ici la première ligne de la deuxième, la deuxième de la troisième, et ainsi de suite, les restes seront des différences secondes par rapport à n, savoir :

$$(10)\ldots\ldots\quad \begin{cases} \Delta_n^2 u_{0,0}, & \Delta_{m,n}^{1+2} u_{0,0}, \text{ etc., répondant à } n=0; \\ \Delta_n^2 u_{0,1}, & \Delta_{m,n}^{1+2} u_{0,1}, \text{ etc., } \ldots\ldots\ldots\ldots n=1; \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En effectuant, sur ce dernier groupe, les mêmes soustractions de lignes que sur les précédents, on formera des différences troisièmes par rapport à n, savoir :

$$(11).\ldots\ldots\quad \begin{cases} \Delta_n^3 u_{0,0}, \text{ etc., répondant à } n=0; \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On poussera cette manière d'opérer jusqu'où il sera nécessaire : rassemblant ensuite les termes relatifs à $u_{0,0}$, qui composent la première ligne de chaque groupe, on aura toutes les différences indiquées dans la formule (7).

§ 146. Si l'on voulait appliquer ce procédé au premier tableau du § précédent, il faudrait commencer par former les séries (8). On a d'abord :

Quand $n = 0$,

Valeurs de u	5		6		9		14	etc.
Différences premières		1		3		5		etc.
» secondes			2		2		etc.	
» troisièmes				0.				

Quand $n = 1$,

Valeurs de u	8		11		16		23	etc.
Différences premières		3		5		7		etc.
» secondes.			2		2		etc.	
» troisièmes				0.				

Quand $n = 2$,

Valeurs de u	17		22		29		38	etc.
Différences premières		5		7		9		etc.
» secondes.			2		2		etc.	
» troisièmes				0.				

Quand $n = 3$,

Valeurs de u	32		39		48		59	etc.
Différences premières		7		9		11		etc.
» secondes.			2		2		etc.	
» troisièmes				0,				

et ainsi de suite : de manière que les séries (8) ont, pour valeurs numériques,

5, 1, 2, 0 . . . . . répondant à $n = 0$,
8, 3, 2, 0 . . . . . $n = 1$,
17, 5, 2, 0 . . . . . $n = 2$,
32, 7, 2, 0 . . . . . $n = 3$.

Les valeurs numériques des séries (9) se déduiront de celles-ci, et l'on trouvera

$$\begin{array}{lll} 3,\ 2,\ 0 & \ldots\ldots & \text{répondant à } n = 0, \\ 9,\ 2,\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & n = 1, \\ 15,\ 2,\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & n = 2. \end{array}$$

De ces dernières, l'on déduira les valeurs numériques des séries (10), savoir :

$$\begin{array}{lll} 6,\ 0 & \ldots\ldots\ldots & \text{répondant à } n = 0, \\ 6,\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & n = 1; \end{array}$$

et si l'on voulait pousser l'opération jusqu'aux séries (11), on trouverait zéro pour résultat.

Il suit de ce qui précède, que dans cet exemple on a

$$\begin{array}{llll} u_{0,0} = 5, & \Delta_m u_{0,0} = 1, & \Delta_m^2 u_{0,0} = 2, & \Delta_m^3 u_{0,0} = 0, \\ & \Delta_n u_{0,0} = 3, & \Delta_{m,n}^{1+1} u_{0,0} = 2, & \Delta_{m,n}^{2+1} u_{0,0} = 0, \\ & & \Delta_n^2 u_{0,0} = 6, & \Delta_{m,n}^{1+2} u_{0,0} = 0, \\ & & & \Delta_m^3 u_{0,0} = 0, \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} u_{m,n} &= 5 + m + 3n + 2\frac{m(m-1)}{1.2} + 2\frac{mn}{1.1} + 6\frac{n(n-1)}{1.2} \\ &= 5 + m^2 + 2mn + 3n^2; \end{aligned}$$

fonction qui devient identique avec celle qui a servi à former le tableau, si l'on remarque que les variables x et y ont précisément les mêmes valeurs que les indices m et n.

§ 147. Pour faire servir la formule (7) à l'interpolation des tables à double entrée, considérons, dans l'espace, un assemblage de points M, M′, M″, etc., tels que l'un quelconque M de ces points, ait pour ordonnée $u_{m,n}$, ses abscisses étant x_m et y_n. Si l'on suppose

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \text{etc.} = h,$$
$$y_1 - y_0 = y_2 - y_1 = y_3 - y_2 = \text{etc.} = k,$$

on aura, en général,

$$x_m = x_0 + mh, \quad y_n = y_0 + nk;$$

d'où, en désignant x_m et y_n par x' et y',

$$m = \frac{x'-x_0}{h}, \quad n = \frac{y'-y_0}{k}.$$

En remplaçant m et n par ces valeurs dans l'équation (7), celle-ci pourra être regardée comme l'équation d'une surface, dont les coordonnées courantes seront x', y', et $u_{m,n}$ que nous dénoterons par u'. Cette surface sera assujettie à passer par les points M, M', M'', etc., puisque ses coordonnées courantes x', y', u', admettent pour valeurs toutes celles de x_m, y_n, $u_{m,n}$, qui répondent à des valeurs entières de m et de n. Il s'ensuit, que la simple hypothèse d'une loi de continuité entre les x', y' et u', de l'équation (7), suffira pour changer cette équation, qui ne représente qu'un nombre indéfini de points isolés, en celle d'une surface continue. C'est à quoi l'on parvient, en admettant qu'elle se vérifie pour des indices fractionnaires, ou, en d'autres termes, en admettant que x' et y' sont susceptibles de tous les degrés de grandeur imaginables. Posant donc, pour abréger,

$$x'-x_0 = h', \quad y'-y_0 = k';$$

d'où

$$m = \frac{h'}{h}, \quad n = \frac{k'}{k},$$

h' et k' devront être considérés comme admettant des valeurs quelconques, entières ou fractionnaires, et la formule (7) sera transformée en

$$(12)\left\{\begin{aligned} u' = u_{0,0} &+ \frac{h'}{h}\Delta_m u_{0,0} + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta_m^2 u_{0,0} + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta_m^3 u_{0,0} + \text{etc.} \\ &+ \frac{k'}{k}\Delta_n u_{0,0} + \frac{k'h'}{kh}\Delta_{m+n}^{1+1} u_{0,0} + \frac{k'h'(h'-h)}{k.h.2h}\Delta_{m,n}^{2+1} u_{0,0} + \text{etc.} \\ &+ \frac{k'(k'-k)}{k.2k}\Delta_n^2 u_{0,0} + \frac{h'k'(k'-k)}{h.k.2k}\Delta_{m,n}^{1+2} u_{0,0} + \text{etc.} \\ &+ \frac{k'(k'-k)(k'-2k)}{k.2k.3k}\Delta_n^3 u_{0,0} + \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

§ 148. Il nous reste à faire voir par un exemple, comment on peut appliquer la formule précédente à l'interpolation des tables elliptiques :

Soit proposé de trouver la fonction dig.(c, φ), dont l'amplitude est $\varphi = 54°.45'$, et dont l'angle du module est $\theta = 60°.15'$. On tire d'abord de la table générale des digamma (*Traité des fonctions elliptiques*, tome II, page 343), les données suivantes :

Valeurs de θ.

Valeurs de φ.	60°.	61°.	62°.	63°.
54°.	1.06018 2905	1.06346 3234	1.06672 8358	1.06997 2417
55°.	1.08479 4340	1.08832 0959	1.09183 4359	
56°.	1.10971 2368	1.11350 1120		
57°.	1.13494 4421			

Regardons θ comme x_m et φ comme y_n : nous aurons

$$h = 1°, \quad h' = 15', \quad \frac{h'}{h} = \frac{1}{4},$$

$$k = 1°, \quad k' = 45', \quad \frac{k'}{k} = \frac{3}{4}.$$

Par les différences prises dans la première ligne verticale, on trouve

$$u_{0,0} = 1.06018\ 2905, \quad \Delta_n u_{0,0} = 0.02461\ 1435,$$
$$\Delta_n^2 u_{0,0} = 0.00030\ 6593, \quad \Delta_n^3 u_{0,0} = 0.00000\ 7432.$$

Par les différences prises dans la deuxième ligne verticale, on trouve

$$u_{1,0} = 1.06346\ 3234,$$
$$\Delta_n u_{1,0} = 0.02485\ 7725,$$
$$\Delta_n^2 u_{1,0} = 0.00032\ 2436.$$

Combinant ces résultats avec les précédents, on en déduit

$$\Delta_m u_{0,0} = 0.00328\ 0329,$$
$$\Delta_{m,n}^{1+1} u_{0,0} = 0.00024\ 6290,$$
$$\Delta_{m,n}^{1+2} u_{0,0} = 0.00001\ 5843.$$

Par les différences prises dans la première ligne horizontale, on a

$$u_{0,0} = 1.06018\ 2905, \qquad \Delta_m u_{0,0} = 0.00328\ 0329,$$
$$\Delta_m^2 u_{0,0} = -0.00001\ 5205, \qquad \Delta_m^3 u_{0,0} = -0.00000\ 5860.$$

Par les différences prises dans la deuxième ligne horizontale, on a

$$u_{0,1} = 1.08479\ 4340,$$
$$\Delta_m u_{0,1} = 0.00352\ 6619,$$
$$\Delta_m^2 u_{0,1} = -0.00001\ 3219.$$

Retranchant $\Delta_m^2 u_{0,0}$ de $\Delta_m^2 u_{0,1}$, on aura le terme $\Delta_{m,n}^{2+1} u_{0,0}$, qu'on trouvera égal à $-0.00001\ 3219 + 0.00001\ 5205 = 0.00000\ 1986$.

Cela posé, si l'on se borne aux différences du premier ordre, on aura

$$\text{dig.}(c, \varphi) = u_{0,0} + \frac{1}{4}\Delta_m u_{0,0} + \frac{3}{4}\Delta_n u_{0,0} = 1.07946\ 15635 :$$

ajoutant les termes du second ordre, savoir :

$$-\frac{3}{32}\Delta_m^2 u_{0,0} + \frac{3}{16}\Delta_{m,n}^{1+1} u_{0,0} - \frac{3}{32}\Delta_n^2 u_{0,0} = 0.00001\ 88617,$$

il viendra

$$\text{dig.}(c, \varphi) = 1.07948\ 04252.$$

Enfin, ajoutant encore les termes du troisième ordre

$$\frac{7}{128}\Delta_m^3 u_{0,0} - \frac{9}{128}\Delta_{m,n}^{2+1} u_{0,0} - \frac{3}{128}\Delta_{m,n}^{1+2} u_{0,0} + \frac{5}{128}\Delta_n^3 u_{0,0}$$
$$= -0.00000\ 05411,$$

on aura, plus exactement,

$$\text{dig.}(c, \varphi) = 1.07947\ 98841.$$

La méthode des modules croissants a fourni à Legendre, pour valeur de la même fonction,

$$\text{dig.}(c, \varphi) = 1.07947\ 98929;$$

mais il ne faut pas se dissimuler que l'interpolation donne rarement des résultats aussi exacts que dans cet exemple. Il peut même arriver, qu'en tenant compte des différences troisièmes, on obtienne un résultat moins exact qu'en les négligeant; ce qui aura lieu lorsque la correction qu'on aurait tirée des différences quatrièmes, surpassera celle qui provient des différences troisièmes. En général, l'usage le plus ordinaire des tables elliptiques à double entrée, sera de faire

trouver la valeur des fonctions, avec quatre ou cinq décimales seulement; et pour cela, on n'aura besoin que des différences premières, que l'on pourra toujours prendre à vue.

§ 149. Passons maintenant à la construction des tables elliptiques:

La méthode la plus avantageuse pour la construction de ces tables, nous paraît être celle que les astronomes connaissent sous le nom de *méthode des quadratures mécaniques*. Voici comment elle est exposée par M. De Pontécoulant, dans sa *Théorie analytique du système du monde* (tome II, page 105):

Soit y une fonction quelconque de x, et

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots\ y_n,$$

ce que devient successivement cette fonction, lorsqu'on suppose

$$x=0,\ x=\alpha,\ x=2\alpha,\ \ldots\ldots\ x=n\alpha:$$

désignons par Δy_0, Δy_1, etc., les différences finies de ces quantités prises deux à deux; par $\Delta^2 y_0$, $\Delta^2 y_1$, leurs différences secondes, et ainsi de suite; en sorte qu'on ait

$$(13).\begin{cases} y_1-y_0=\Delta y_0, & \Delta y_1-\Delta y_0=\Delta^2 y_0, & \Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0=\Delta^3 y_0, \\ y_2-y_1=\Delta y_1, & \Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1, & \Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1=\Delta^3 y_1, \\ \text{etc.}: \end{cases}$$

on en conclura généralement, comme au § 142,

$$(14).\quad y_n=y_0+n\Delta y_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0+\text{etc.};$$

formule qui sera très-convergente, si les différences Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, etc., décroissent avec beaucoup de rapidité.

Cela posé, on peut regarder $y=f(x)$, comme l'équation d'une courbe parabolique, dont y représente l'ordonnée et x l'abscisse. Cette courbe passera par les extrémités des ordonnées équidistantes y_0, y_1, etc., et l'on aura d'autant plus de facilité pour la tracer, que ces ordonnées seront plus rapprochées: y_n dénotera l'ordonnée qui répond à l'abscisse quelconque $x=n\alpha$, et $\int y_n dx$ sera l'aire indéfinie comprise entre la courbe et l'axe des x. Si dans l'équation (14), on substitue à la place de n sa valeur $\frac{x}{\alpha}$, on aura

$$y_n=y_0+\frac{x}{\alpha}\Delta y_0+\frac{x(x-\alpha)}{1.2\alpha^2}\Delta^2 y_0+\frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3\alpha^3}\Delta^3 y_0+\text{etc.}$$

Multiplions cette valeur par dx, et intégrons-la depuis $x=0$ jusqu'à $x=\alpha$: l'expression résultante sera celle de l'aire comprise entre les ordonnées y_0 et y_1. On trouvera, de cette manière,

$$\int y_n dx =$$
$$\alpha\left(y_0+\frac{1}{2}\Delta y_0-\frac{1}{12}\Delta^2 y_0+\frac{1}{24}\Delta^3 y_0-\frac{19}{720}\Delta^4 y_0+\frac{3}{160}\Delta^5 y_0-\text{etc.}\right).$$

De même, pour l'aire comprise entre les ordonnées y_1 et y_2, on aura

$$\int y_n dx =$$
$$\alpha\left(y_1+\frac{1}{2}\Delta y_1-\frac{1}{12}\Delta^2 y_1+\frac{1}{24}\Delta^3 y_1-\frac{19}{720}\Delta^4 y_1+\frac{3}{160}\Delta^5 y_1-\text{etc.}\right),$$

et ainsi de suite

En prenant donc la somme de toutes ces valeurs, pour l'aire totale comprise entre les ordonnées y_0 et y_n, il viendra

$$\begin{aligned}\int y dx = {} & \alpha\,(y_0+y_1+y_2+\ldots\ldots+y_{n-1})\\ & +\frac{\alpha}{2}(\Delta y_0+\Delta y_1+\Delta y_2+\ldots\ldots+\Delta y_{n-1})\\ & -\frac{\alpha}{12}(\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_1+\Delta^2 y_2+\ldots\ldots+\Delta^2 y_{n-1})\\ & +\text{etc.}\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\Delta y_0+\Delta y_1+\Delta y_2+\ldots\ldots+\Delta y_{n-1}=y_n-y_0,$$
$$\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_1+\Delta^2 y_2+\ldots\ldots+\Delta^2 y_{n-1}=\Delta y_n-\Delta y_0,$$

etc. :

l'expression précédente devient donc

$$(15)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}\int y dx = {} & \alpha\,(\tfrac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots\ldots+y_{n-1}+\tfrac{1}{2}y_n)\\ & -\frac{\alpha}{12}(\Delta y_n-\Delta y_0)\\ & +\frac{\alpha}{24}(\Delta^2 y_n-\Delta^2 y_0)\\ & -\frac{19\alpha}{720}(\Delta^3 y_n-\Delta^3 y_0)\\ & +\frac{3\alpha}{160}(\Delta^4 y_n-\Delta^4 y_0)\\ & -\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

§ 150. La détermination des différences Δy_n, $\Delta^2 y_n$, etc., qui entrent dans cette formule, dépend des quantités y_{n+1}, y_{n+2}, etc., tandis qu'on n'est supposé avoir calculé ces ordonnées que depuis y_0 jusqu'à y_n. Ce serait un inconvénient pour la pratique; mais on peut l'éviter, en donnant une autre forme à cette expression. Pour cela, remarquons que des équations (13), on tire les séries suivantes, dont chacune doit être censée continuée jusqu'à l'infini :

$$\begin{aligned}
\Delta y_n &= \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \text{etc.},\\
\Delta^2 y_n &= \Delta^2 y_{n-2} + 2.\,\Delta^3 y_{n-3} + 3.\,\Delta^4 y_{n-4} + \text{etc.},\\
\Delta^3 y_n &= \Delta^3 y_{n-3} + 3.\,\Delta^4 y_{n-4} + 2.3.\,\Delta^5 y_{n-5} + \text{etc.},\\
&\text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

d'où l'on peut conclure généralement

$$\Delta^i y_n = \Delta^i y_{n-i} + i\Delta^{i+1} y_{n-i-1} + \frac{i(i+1)}{1.2}\Delta^{i+2} y_{n-i-2} + \text{etc.}$$

Si l'on substitue ces valeurs (qui ne dépendent plus que des quantités y_n, y_{n-1}, etc.) dans la formule (15), on aura

$$(16).\left\{\begin{aligned}
\int y dx = \alpha(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\\
- \frac{\alpha}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0)\\
- \frac{\alpha}{24}(\Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_0)\\
- \frac{19\alpha}{720}(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0)\\
- \frac{3\alpha}{160}(\Delta^4 y_{n-4} - \Delta^4 y_0)\\
- \text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Le premier terme de cette série représente, comme il est facile de le voir, la somme des petits trapèzes compris entre les ordonnées y_0, y_1,.... y_n; somme qui approchera d'autant plus de l'aire de la courbe parabolique, que les ordonnées seront plus rapprochées, et leurs variations plus petites.

§ 151. Si l'on désigne par U_n le premier membre de la formule (15), U_n représentera l'intégrale $\int y dx$ prise entre les limites y_0 et y_n. Dénotons par U_{n+1} la même intégrale entre les limites y_0 et y_{n+1} :

pour déduire U_{n+1} de U_n, il suffira de changer n en $n+1$, et l'on aura

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\alpha}{2}(y_n + y_{n+1}) - \frac{\alpha}{12}(\Delta y_{n+1} - \Delta y_n)$$
$$+ \frac{\alpha}{24}(\Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n) - \frac{19\alpha}{720}(\Delta^3 y_{n+1} - \Delta^3 y_n)$$
$$+ \frac{3\alpha}{160}(\Delta^4 y_{n+1} - \Delta^4 y_n) - \text{etc.};$$

d'où l'on tire, en réduisant,

(17). . . . . $U_{n+1} - U_n =$

$$\alpha\left(y_n + \frac{1}{2}\Delta y_n - \frac{1}{12}\Delta^2 y_n + \frac{1}{24}\Delta^3 y_n - \frac{19}{720}\Delta^4 y_n + \frac{3}{160}\Delta^5 y_n - \text{etc.}\right).$$

§ 152. Supposons, par exemple, que l'on veuille construire des tables de la fonction upsilon, pour tous les degrés de l'angle du module et de l'amplitude : ayant posé

$$\Upsilon(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi \,\text{eps.}(c,\varphi)}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}} = \int y dx,$$

on aura

$$\frac{\text{eps.}(c, \varphi)}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}} = y, \quad x = \text{arc}\,\varphi, \quad \alpha = \text{arc}\,1^\circ,$$

$$\frac{\text{eps.}(c, 0^\circ)}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 0^\circ}} = y_0 = 0, \qquad \frac{\text{eps.}(c, 1^\circ)}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 1^\circ}} = y_1,$$

$$\frac{\text{eps.}(c, 2^\circ)}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 2^\circ}} = y_2, \quad \text{etc.}$$

On commencera par construire une table de la fonction y, pour tous les modules, depuis y_0 jusqu'à y_{95}, afin d'avoir $\Delta^5 y_{90}$: on calculera ensuite la fonction Υ de degré en degré, au moyen de la formule (17). Seulement, lorsque l'amplitude φ ne sera que d'un petit nombre de degrés, cette formule ne sera pas suffisamment convergente. Dans ce cas, on aura recours soit à la formule (19) du § 66, que l'on peut toujours rendre applicable par des calculs de bissection, soit aux méthodes d'approximation exposées aux chapitres XI et XIV.

Nous avons vu au § 66, qu'à la rigueur il ne faudrait calculer les upsilon que depuis $\varphi = 0^\circ$ jusqu'à $\varphi = \text{amp.}\left(\frac{D}{2}\right)$, puisqu'il est facile de déduire $\Upsilon\,\text{amp.}(D - p)$ de $\Upsilon\,\text{amp.}p$. Mais si la fonction $\Upsilon\,\text{amp.}p$, que nous supposons connue, répondait à un nombre exact de degrés, ce n'est que par hasard qu'il en serait de même de la fonction $\Upsilon\,\text{amp.}(D - p)$. Ainsi, au delà de la limite $\text{amp.}\left(\frac{D}{2}\right)$, on ne pourrait faire procéder la table de degré en degré, que par des interpolations, plus laborieuses peut-être que le calcul direct de la fonction. Quant à l'upsilon complet $\Upsilon\,\text{amp.}\,D$, sa valeur s'obtiendra par la formule

$$\Upsilon\,\text{amp.}\,D = \tfrac{1}{2}DE - \tfrac{1}{2}\log.b,$$

qui, jointe à la formule

$$\Upsilon\,\text{amp.}(D - p) = \Upsilon\,\text{amp.}\,p + E(\tfrac{1}{2}D - p) + \log.\frac{\Delta\,\text{amp.}\,p}{\sqrt{b}},$$

pourra servir à vérifier les résultats obtenus par le calcul direct.

§ 153. Il faut remarquer que tous les éléments nécessaires pour calculer la fonction y, sont donnés par les tables elliptiques. En effet, la fonction epsilon a été calculée par Legendre, pour tous les degrés de l'angle du module et de l'amplitude, et le radical $\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi} = \frac{d.\text{eps.}\varphi}{d\varphi}$, se déduit de cette même fonction avec beaucoup de promptitude, au moyen de la formule

$$\frac{du}{d\varphi}h = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u - \tfrac{1}{4}\Delta^4 u + \text{etc.},$$

que nous démontrerons au § suivant.

Voici un exemple de la détermination du radical au moyen de la transcendante epsilon, pour le cas où

$$\varphi = 10^\circ, \quad c = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sin.45^\circ,$$

valeur du module qui nous permettra de faire usage de la table II de Legendre, qui procède par demi-degrés. Nous ferons observer que les différences secondes et troisièmes de la fonction epsilon sont négatives, et que nous avons désigné par u l'epsilon de 10°, et par h l'arc de $0^\circ.5$, dont la valeur, en parties du rayon, est 0.00872 66462 6.

Type du calcul.

$$\Delta u = 0.00865\ 72774\ 41$$
$$\tfrac{1}{2}\Delta^2 u = 0.00000\ 34400\ 35$$

Somme. . . . $0.00866\ 07174\ 76$

$$\tfrac{1}{3}\Delta^3 u = 0.00000\ 01058\ 69$$

Différence. . . $0.00866\ 06116\ 07 = \mathrm{N}.$

En employant les logarithmes vulgaires,

$$\log.\ \mathrm{N} = \overline{3}.93754\ 85$$
$$\log.\ h = \overline{3}.94084\ 71$$

Différence . . . $\overline{1}.99670\ 14$

$$= \log.\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}.$$

Vérification.

$$2 \log.\sin.10^\circ = 8.47934\ 04$$
$$\log.\ 2 = 0.30102\ 99$$

Différence. . . . . $8.17831\ 05 = \log.\sin.^2 v$

$$\log.\sin.v = 9.08915\ 52$$
$$\log.\cos.v = 9.99670\ 14$$
$$= \log.\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}.$$

§ 154. Voici à peu près comment M. Lacroix (*Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*) démontre la formule

$$(18). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{du}{d\varphi} h = \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2 u + \tfrac{1}{3}\Delta^3 u - \text{etc.}:$$

A l'aide du théorème de Taylor, le développement des différences d'un ordre quelconque, pour une fonction quelconque, s'obtient sans difficulté. On a premièrement, en faisant $f(x) = u$, $f(x+h) - f(x) = \Delta u$,

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et si, dans cette équation, on met successivement Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc., au lieu de u, on formera les expressions

$$\Delta^2 u = \frac{d\Delta u}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Delta u}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\Delta^3 u = \frac{d\Delta^2 u}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta^2 u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$$\Delta^4 u = \frac{d\Delta^3 u}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \text{etc.},$$

etc.,

au moyen desquelles le développement de chaque différence se déduit de celui de la précédente. On obtiendra d'abord

$$\begin{aligned}\Delta^2 u = \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1} &+ \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2} + \frac{d^4u}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{1.2.3} + \text{etc.}\\ &+ \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2} + \frac{d^4u}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{2.2} + \text{etc.}\\ &+ \frac{d^4u}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{2.3} + \text{etc.};\end{aligned}$$

et, en général,

$$(19)\ldots\ldots \quad \Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.},$$

A′, A″, etc., désignant des coefficients qui ne dépendent que de n. Cette équation devant subsister pour toutes les formes que peut prendre la fonction u, elle conviendra nécessairement au cas où $u = e^x$; mais alors on a

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^3u}{dx^3} = \text{etc.} = e^x,$$

$$\Delta u = e^{x+h} - e^x = e^x (e^h - 1),$$

$$\Delta^2 u = e^{x+h}(e^h - 1) - e^x(e^h - 1) = (e^{x+h} - e^x)(e^h - 1) = e^x(e^h - 1)^2,$$

$$\Delta^3 u = e^{x+h}(e^h - 1)^2 - e^x(e^h - 1)^2 = e^x(e^h - 1)^3,$$

. . . . . .

$$\Delta^n u = e^x (e^h - 1)^n :$$

substituant cette valeur de $\Delta^n u$, dans le premier membre de l'équation (19), et celles de $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., dans le second, on obtient

$$(e^h - 1)^n = h^n + A'h^{n+1} + A''h^{n+2} + \text{etc.};$$

d'où il suit que les coefficients A', A'', etc., doivent être les mêmes que ceux du développement de $(e^h - 1)^n$, puisque l'accroissement h doit demeurer indéterminé.

On sait d'ailleurs que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et il suit de cette formule, que

$$e^{\frac{du}{dx}h} = 1 + \frac{du}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{du^3}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$(20) \ldots e^{\frac{du}{dx}h} - 1 = \frac{du}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{du^3}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si, maintenant, on transporte les exposants des puissances de du à la caractéristique d, le second membre de l'équation précédente deviendra

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et sera la même chose que Δu : on aura donc l'équation symbolique

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad \Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1,$$

et, en général,

$$\Delta^n u = (e^{\frac{du}{dx}h} - 1)^n,$$

en observant toujours de transporter à la caractéristique d, les exposants des puissances de du. Cette dernière formule se vérifie sans peine, par la comparaison de l'équation (19) avec l'équation (20), dont on élève les deux membres à la puissance n, si l'on remarque que nous avons démontré que les coefficients numériques de h, dans le développement de $\Delta^n u$, sont les mêmes que ceux du développement de $(e^h - 1)^n$, et les mêmes, par conséquent, que ceux du développement de $\left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^n$.

§ 155. De l'équation (21) on tire

$$\frac{du}{dx}h = \log.(1 + \Delta u) :$$

Lagrange a encore reconnu que cette équation serait vraie, si dans le développement de $\log.(1 + \Delta u)$, on transportait les exposants de Δu à la caractéristique Δ ; ce qui donnerait l'équation (18), en prenant $x = \varphi$.

Au lieu de s'arrêter à démontrer ce cas particulier, M. Lacroix prouve qu'en général

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \log.^n(1 + \Delta u),$$

en changeant Δu^2, Δu^3, etc., en $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc., ou bien

$$(22). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d^n u}{dx^n} h^n = u \log.^n(1 + \Delta),$$

sans rien changer au développement.

Il est visible que la question revient à déterminer les coefficients différentiels $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., en fonction des différences successives de u, et que pour cela on a des équations de la forme

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.},$$

$$\Delta^{n+1} u = \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'_1 \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.},$$

$$\Delta^{n+2} u = \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.},$$

etc.,

dans lesquelles les coefficients différentiels ne montent qu'au premier degré : on peut donc faire

$$(23). \; . \; \frac{d^n u}{dx^n} h^n = \Delta^n u + B' \Delta^{n+1} u + B'' \Delta^{n+2} u + B''' \Delta^{n+3} u + \text{etc.}$$

On obtiendrait facilement la valeur des coefficients inconnus B', B'', B''', etc., par l'élimination successive de

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} h^{n+1}, \quad \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} h^{n+2}, \text{ etc. ;}$$

mais, puisque l'équation hypothétique (23) doit avoir lieu quel que soit u, elle subsistera encore lorsqu'on y fera $u = e^x$; ce qui donnera

$$\frac{d^i u}{dx^i} = e^x, \quad \text{et } \Delta^i u = e^x (e^h - 1)^i,$$

quelle que soit la valeur du nombre entier i : l'on trouvera, par conséquent,

$$(24) \ldots h^n = (e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{etc.}$$

Pour mettre en évidence l'identité des deux membres de cette équation, il suffit d'observer que

$$(25) \ldots\ldots\ldots h^n = \log.^n (1 + e^h - 1):$$

or, le développement de $\log.(1 + e^h - 1)$ suivant les puissances de $e^h - 1$, qui est

$$e^h - 1 - \tfrac{1}{2}(e^h - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(e^h - 1)^3 - \tfrac{1}{4}(e^h - 1)^4 + \text{etc.},$$

étant élevé à la puissance n, deviendra comparable à la série

$$(e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{etc.},$$

dont les coefficients numériques B', B'', etc., seront, par conséquent, déterminés. Si l'on écrit Δu à la place de $e^h - 1$, et $\frac{d^n u}{dx^n} h^n$ à celle de h^n, dans les équations (24) et (25), celles-ci coïncideront avec les équations (23) et (22), en transportant, comme nous l'avons dit, l'exposant à la caractéristique Δ.

En faisant, pour abréger, $e^h - 1 = \alpha$, et développant

$$(\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{1}{4}\alpha^4 + \text{etc.})^n$$

suivant les puissances de α, on obtiendra les valeurs de B', B'', etc.

§ 156. Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur la construction des tables elliptiques. On peut voir, soit dans le tome III des *Exercices de calcul intégral*, soit dans le tome II du *Traité des fonctions elliptiques*, l'exposition des méthodes employées par Legendre, pour calculer ces transcendantes avec tout le degré d'approximation que peuvent donner les grandes tables trigonométriques de Briggs. Dans aucun autre ouvrage, peut-être, on ne trouvera des exemples de calculs numériques, dirigés par des formules aussi propres à abréger le travail, et exécutés avec un aussi grand degré de précision.

CHAPITRE XVI.

Réduction de quelques intégrales aux transcendantes elliptiques.

§ 157. La nature des fonctions elliptiques étant connue et approfondie, il importe de ramener à ces transcendantes, le plus grand nombre d'intégrales qu'il sera possible. Comme la multitude en est infinie, nous nous contenterons d'indiquer, d'après Legendre, quelques-uns des cas principaux où cette réduction a lieu.

I. On peut réduire aux fonctions elliptiques l'intégrale

$$\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4+\delta x^6}},$$

dans laquelle P est une fonction rationnelle de x.

Car si l'on fait $x^2=z$, on pourra supposer $P=M+N\sqrt{z}$, M et N étant des fonctions rationnelles de z, et l'intégrale proposée deviendra

$$\int \frac{\frac{1}{2}M dz}{\sqrt{\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4}}+\int \frac{\frac{1}{2}N dz}{\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}},$$

dont les deux parties sont comprises dans les fonctions elliptiques.

II. Toute formule

$$\int \frac{P dx}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}},$$

dans laquelle P est une fonction rationnelle de x, peut se ramener aux fonctions elliptiques.

Car on peut toujours faire $P=M+Nx$, M et N étant des fonctions rationnelles paires de x. Considérons la partie

$$\frac{Nx dx}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}}:$$

si l'on fait $\sqrt[4]{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4} = z$; ce qui donne

$$x^2 = -\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^4}}{2\gamma},$$

il est clair que, par la substitution de la valeur de x^2, $Nxdx$ ne contiendra d'autre radical que $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^4}$: donc, toute la difficulté se réduit à intégrer une quantité de la forme

$$\frac{Qz^2dz}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^4}},$$

dans laquelle Q est une fonction rationnelle de z^4.

Quant à la partie

$$\frac{Mdx}{\sqrt[4]{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}},$$

si l'on fait $\sqrt[4]{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4} = xy$, on aura

$$x^2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y^4}}{2(\gamma - y^4)},$$

$$\frac{dx}{\sqrt[4]{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4}} = \frac{2x^2y^2dy}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y^4}};$$

par où l'on voit que la transformée en y, contiendra une partie rationnelle, et une de la forme

$$\frac{Ry^2dx}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y^4}},$$

R étant une fonction de y^4 : donc, la formule proposée est toujours réductible aux fonctions elliptiques.

III. On résoudrait absolument de la même manière, la formule

$$\int Pdx\sqrt[4]{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4},$$

P étant une fonction rationnelle de x.

Ces deux cas comprennent la formule

$$\int Pdx(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)^{\pm\frac{3}{4}},$$

et aussi la formule

$$\int Qdy(\alpha + \beta y + \gamma y^2)^{\pm\frac{1}{2}},$$

Q étant une fonction rationnelle de y; car en faisant $y = x^2$, cette dernière devient un cas particulier des deux autres.

IV. On peut réduire aux fonctions elliptiques la formule

$$\int \mathrm{P}dx(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}},$$

P étant une fonction rationnelle de x.

Cette réduction peut se faire de plusieurs manières : et d'abord, si l'on fait l'une ou l'autre des suppositions

$$\sqrt[3]{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} = \sqrt[3]{\alpha} + z,$$
$$\sqrt[3]{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} = x\sqrt[3]{\delta} + z,$$

la transformée en z sera comprise dans les fonctions elliptiques. On peut aussi faire disparaître, à volonté, le coefficient α ou le coefficient δ sous le radical : il faut faire, pour cela, $x = m + y$, ou $x = m + \frac{1}{y}$, et prendre pour m une racine réelle de l'équation $\alpha + \beta m + \gamma m^2 + \delta m^3 = 0$. Supposons qu'on ait fait disparaître de cette manière δ : alors, on fera $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = z^3$; ce qui donne

$$x = -\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^3}}{2\gamma};$$

et, en substituant cette valeur dans la formule proposée, toute la difficulté se réduit à intégrer une différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{Q}dz}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^3}},$$

Q étant une fonction rationnelle de z.

V. On peut réduire aux fonctions elliptiques la formule

$$\int \frac{\mathrm{P}dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \gamma x^4 + \beta x^5 + \alpha x^6}},$$

P étant une fonction rationnelle de x.

Car si l'on fait $x^2 + 1 = xz$, cette formule deviendra d'abord

$$\int \frac{\mathrm{P}x^{-\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{\alpha(z^3 - 3z) + \beta(z^2 - 2) + \gamma z + \delta}}:$$

ensuite, comme on a $x = \frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4}$, cette valeur étant substituée dans P, le résultat sera de la forme $\mathrm{M} \pm \mathrm{N}\sqrt{z^2 - 4}$, M et N étant des fonctions rationnelles de z. De plus, on a

$$x+1=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{z+2},$$
$$x-1=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{z-2},$$
$$2x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{z+2}+\sqrt{z-2},$$
$$x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z+2}}+\frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z-2}}:$$

donc, toutes les substitutions étant faites, la formule proposée sera composée de deux parties, l'une de la forme $\int\frac{Zdz}{\sqrt{Q(z+2)}}$, Z étant une fonction rationnelle de z, et Q désignant le polynome $\alpha(z^3-3z)+\beta(z^2-2)+\gamma z+\delta$; l'autre étant de la forme $\int\frac{Z'dz}{\sqrt{Q(z-2)}}$, Z′ étant aussi une fonction rationnelle de z. Donc, la transformée en z sera intégrable par les fonctions elliptiques.

VI. On pourra intégrer de même la formule

$$\int\frac{Pdy}{\sqrt{\beta+\gamma y^2+\delta y^4+\gamma y^6+\beta y^8}},$$

P étant une fonction rationnelle de y.

Car si l'on fait $P=M+Ny$, M et N étant des fonctions paires de y, et qu'on appelle R le radical, la partie $\frac{Mdy}{R}$ rentrera dans le cas précédent, en faisant $\alpha=0$ et $y^2=x$. L'autre partie $\frac{Nydy}{R}$, se réduit pareillement aux fonctions elliptiques, en faisant $y^2=x$.

VII. On peut ramener aux fonctions elliptiques, la formule

$$\int\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x^4+\gamma x^8}},$$

P étant une fonction rationnelle de x, pourvu que α et γ soient de même signe.

Car en faisant $\gamma=\alpha m^8$ et $mx=y$, cette formule se trouve comprise dans le cas précédent.

VIII. Soit proposée la formule

$$Z=\int\frac{Qd\varphi}{\sqrt{1-m\sin.^2\varphi}},$$

Q étant une fonction rationnelle paire de sin. φ, et m étant plus grand que l'unité.

Pour ramener cette formule aux fonctions elliptiques, soit d'abord $m=\frac{1}{\sin.^2\alpha}$: on voit que α doit être la plus grande valeur de φ. Soit

donc $\sin.\varphi = \sin.\alpha \sin.\psi$, et $c = \sin.\alpha$: la transformée sera

$$Z = \int \frac{cQd\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\psi}},$$

et Q deviendra, par la substitution, une fonction rationnelle paire de $\sin.\psi$; de sorte que la formule proposée sera ramenée aux fonctions elliptiques.

IX. Si l'on avait la formule

$$Z = \int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{1 + m \sin.^2\varphi}},$$

m étant positif et d'une grandeur quelconque, il suffirait, pour ramener cette quantité aux fonctions elliptiques, de faire $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \psi$, et $\frac{m}{1+m} = c^2$.

X. Soit proposée la formule

$$Z = \int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{f + g \cos.\varphi + h \sin.\varphi}},$$

dans laquelle f, g, h, sont des constantes, et Q désigne une fonction rationnelle de $\sin.\varphi$ et de $\cos.\varphi$.

On fera d'abord $\varphi = 2\psi + m$, et on prendra l'indéterminée m, de manière que $\tang.m = \frac{h}{g}$: alors la quantité $f + g \cos.\varphi + h \sin.\varphi$, deviendra de la forme $x^2 = f' \pm g' \sin.^2\psi$, et l'on aura

$$Qd\varphi = (M + N \sin.\psi \cos.\psi)d\psi,$$

M et N étant des fonctions paires de $\sin.\psi$. La partie $\frac{Nd\psi \sin.\psi \cos.\psi}{x}$ peut être rendue rationnelle, en remplaçant $\sin.\psi$ par sa valeur en x: ainsi, il ne restera à intégrer que la différentielle $\frac{Md\psi}{x}$, et il est évident que cette intégrale ne dépend que des fonctions elliptiques.

XI. Si l'on a, plus généralement,

$$Z = \int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{(\alpha + \beta \cos.\varphi + \gamma \sin.\varphi + \delta \cos.^2\varphi + \varepsilon \sin.\varphi \cos.\varphi + \zeta \sin.^2\varphi)}},$$

Q étant une fonction rationnelle de $\sin.\varphi$ et de $\cos.\varphi$, on fera $\tang.\frac{1}{2}\varphi = z$; ce qui donnera

$$\sin.\varphi = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos.\varphi = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad d\varphi = \frac{2dz}{1 + z^2},$$

et la transformée en z ne contiendra qu'un radical sous lequel la variable ne passera pas le quatrième degré : elle sera donc généralement réductible aux fonctions elliptiques.

XII. Soit

$$Z = \int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{(\alpha + \beta \sin.^2\varphi)}\sqrt{\gamma + \delta \sin.^2\varphi}},$$

Q étant d'abord une fonction rationnelle paire de sin.φ : si l'on fait tang.$\varphi = m$ tang.ψ, m étant une indéterminée, on aura

$$\sin.^2\varphi = \frac{m^2 \sin.^2\psi}{m^2 \sin.^2\psi + \cos.^2\psi}, \quad d\varphi = \frac{m d\psi}{m^2 \sin.^2\psi + \cos.^2\psi},$$

et la transformée sera

$$Z = \int \frac{m Q d\psi}{RR'},$$

dans laquelle on a pris

$$R^2 = \alpha(m^2 \sin.^2\psi + \cos.^2\psi) + \beta m^2 \sin.^2\psi,$$
$$R'^2 = \gamma(m^2 \sin.^2\psi + \cos.^2\psi) + \delta m^2 \sin.^2\psi.$$

Soit $\alpha m^2 + \beta m^2 = \alpha$, ou $m^2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$, on aura $R^2R'^2 = A + B \sin.^2\psi$, A et B étant des coefficients connus, et l'intégrale sera réduite à la forme

$$\int \frac{m Q d\psi}{\sqrt{A + B \sin.^2\psi}},$$

dans laquelle Q sera une fonction rationnelle de sin.$^2\psi$: ainsi elle sera ramenée aux fonctions elliptiques.

Cette solution suppose la quantité $\alpha(\alpha + \beta)$ positive : si elle ne l'était pas, non plus que $\gamma(\gamma + \delta)$ qui pourrait la remplacer, on ferait simplement sin. $\varphi = x$; ce qui donnerait

$$Z = \int \frac{Q dx}{\sqrt{1 - x^2}.\sqrt{\alpha + \beta x^2}.\sqrt{\gamma + \delta x^2}};$$

et cette formule, où Q peut être supposée une fonction rationnelle de x, est ramenée au cas 1er, dont nous avons indiqué la solution.

On peut même supposer que Q est une fonction rationnelle quelconque de sin. φ et de cos. φ : alors Q se réduira toujours à la forme $Q' + Q''\sqrt{1 - x^2}$, dans laquelle Q' et Q'' seront des fonctions rationnelles de x, et l'on aura

$$Z = \int \frac{Q' dx}{\sqrt{1 - x^2}.\sqrt{\alpha + \beta x^2}.\sqrt{\gamma + \delta x^2}} + \int \frac{Q'' dx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}.\sqrt{\gamma + \delta x^2}};$$

intégrales qui rentrent toutes deux dans les méthodes connues.

FIN.

NOTES.

NOTE PREMIÈRE.

Voici un exemple de ces développements : Soit la fraction proposée

$$\int\frac{Qd\varphi}{\Delta}=\int\frac{A\sin.^6\varphi+B\sin.^4\varphi+C\sin.^2\varphi+D}{E\sin.^8\varphi+F\sin.^6\varphi+G\sin.^4\varphi+H\sin.^2\varphi+K}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}:$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{H}{K}=\alpha,\quad \frac{G}{K}=\beta,\quad \frac{F}{K}=\gamma,\quad \frac{E}{K}=\delta,$$

il viendra

$$\int\frac{Qd\varphi}{\Delta}=\frac{1}{K}\int\frac{d\varphi}{\Delta}\cdot\frac{A\sin.^6\varphi+B\sin.^4\varphi+C\sin.^2\varphi+D}{1+\alpha\sin.^2\varphi+\beta\sin.^4\varphi+\gamma\sin.^6\varphi+\delta\sin.^8\varphi}.$$

Égalant le dénominateur $1+\alpha\sin.^2\varphi+\beta\sin.^4\varphi+$ etc., au produit des quatre facteurs

$$1+n'\sin.^2\varphi,\quad 1+n''\sin.^2\varphi,\quad 1+n'''\sin.^2\varphi,\quad 1+n^{\text{IV}}\sin.^2\varphi,$$

on aura, pour déterminer les coefficients inconnus n', n'', n''', n^{IV}, les relations

$$\begin{aligned}
n'+n''+n'''+n^{\text{IV}}&=\alpha,\\
n'n''+n'n'''+n'n^{\text{IV}}+n''n'''+n''n^{\text{IV}}+n'''n^{\text{IV}}&=\beta,\\
n'n''n'''+n'n''n^{\text{IV}}+n'n'''n^{\text{IV}}+n''n'''n^{\text{IV}}&=\gamma,\\
n'n''n'''n^{\text{IV}}&=\delta;
\end{aligned}$$

ce qui fait voir que ces quantités sont les racines de l'équation

$$n^4-\alpha n^3+\beta n^2-\gamma n+\delta=0.$$

Si deux de ces racines, n' et n'' par exemple, étaient égales, on poserait

$$\frac{A\sin.^6\varphi+B\sin.^4\varphi+C\sin.^2\varphi+D}{1+\alpha\sin.^2\varphi+\beta\sin.^4\varphi+\gamma\sin.^6\varphi+\delta\sin.^8\varphi}$$

$$=\frac{A'}{(1+n'\sin.^2\varphi)^2}+\frac{B'}{1+n'\sin.^2\varphi}+\frac{C'}{1+n'''\sin.^2\varphi}+\frac{D'}{1+n^{\text{IV}}\sin.^2\varphi},$$

et l'on déterminerait les coefficients A', B', C' et D', par les procédés connus.

NOTE II.

Fagnani, géomètre italien d'une grande sagacité, a prouvé le premier que la courbe nommée *lemniscate*, jouit de cette propriété singulière, que ses arcs peuvent être multipliés ou divisés algébriquement, comme les arcs de cercle, quoique chacun d'eux soit une transcendante d'un ordre supérieur. C'est le premier exemple où l'on ait fait servir la théorie des fonctions elliptiques, à la démonstration d'un théorème de géométrie.

La lemniscate (*fig.* 9) a pour propriété caractéristique, que le produit des rayons vecteurs $\overline{MF}$, $\overline{MF'}$, est égal au carré de l'excentricité $\overline{AF} = e$. En désignant l'abscisse $\overline{AP}$ par x, et l'ordonnée $\overline{MP}$ par y, on trouve aisément, pour équation de cette courbe,

$$(y^2 + x^2)^2 - 2e^2 (x^2 - y^2) = 0,$$

à laquelle on satisfait en posant

$$x = \sqrt{2}\, e \cos.\varphi \sqrt{1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 \varphi},$$
$$y = e \sin.\varphi \cos.\varphi,$$

et l'élément ds de la courbe a pour expression

$$ds = \frac{e d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin.^2 \varphi}} :$$

intégrant, et faisant $e = 1$, on aura

$$s = \text{dig.}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \varphi);$$

ce qui prouve que tout arc de lemniscate peut s'exprimer par un digamma, dont l'amplitude dépend de la grandeur de cet arc, mais dont le module est constant et égal à $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Ainsi, l'arc de lemniscate ne peut représenter la fonction dig.$(c,\ \varphi)$, dans toute sa généralité.

Observons que dans le premier quart BMA de la courbe, la valeur de φ s'étend depuis zéro jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$: ainsi, ce quart sera égal à D$(\sqrt{\frac{1}{2}})$. Dans le second quart ADE, la valeur de φ s'étend depuis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\varphi = \pi$; dans le troisième EGA, depuis $\varphi = \pi$ jusqu'à $\varphi = \frac{3}{2}\pi$; et enfin dans le quatrième ACB, depuis $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$.

Lorsque M. Gauss publia (en 1801) sa célèbre découverte de la résolution des équations binomes, il annonça que sa méthode pouvait s'appliquer également à la division en parties égales de l'arc de lemniscate; mais cet habile géomètre n'a jamais fait connaître son analyse. M. Libri, qui a si dignement remplacé Legendre à l'Institut, a résolu ce problème par une méthode nouvelle, aussi simple qu'élégante, mentionnée dans le *Journal de M. Crelle*, tome X, page 167. Étant parti des équations qui servent à la multisection de la lemniscate, il a montré que, par la nature même de leur formation, ces équations sont décomposables en plusieurs facteurs rationnels, chacun desquels sert à la division de la courbe en un nombre différent de parties; et il a prouvé que, dans chaque facteur, les racines ont entre elles un rapport donné. A l'aide de la méthode par laquelle Lagrange a résolu les équations à deux termes, il est parvenu à résoudre complétement les équations, dont toutes les racines peuvent s'exprimer rationnellement par une seule d'entre elles; et à abaisser le degré de l'équation proposée, lorsque ses racines ont entre elles des rapports donnés, sans qu'on puisse cependant les ramener toutes à être des fonctions d'une seule. Le lecteur qui désirerait de plus amples détails sur la multisection de la lemniscate, pourra encore consulter un mémoire d'Abel, publié dans le journal précité, tome IV, page 131.

Legendre a cherché à représenter en général, la fonction dig.(c,φ), par un arc de courbe; mais ses tentatives ne nous ont pas semblé heureuses, car il n'est parvenu à résoudre complétement le problème, qu'en employant une courbe transcendante, dans laquelle l'amplitude φ et l'arc s, ont entre eux une relation géométrique encore plus difficile à saisir que dans la lemniscate. En considérant les fonctions elliptiques comme des secteurs, dont l'angle est précisément égal à l'amplitude φ, nous avons eu l'avantage de justifier la dénomination d'*amplitude* appliquée à l'angle φ; et même celle de *fonctions elliptiques*, en général, puisque les courbes algébriques par lesquelles nous avons représenté ces transcendantes, se construisent avec facilité au moyen des rayons vecteurs d'une ou de deux ellipses données (§§ 16, 28 et 50).

NOTE III.

Le principe de la différentiation sous le signe $\int$, dont il est question dans le texte, peut se démontrer de la manière suivante :

Soit α une quantité indépendante de x, et

$$u = \int f(x, \alpha)\, dx :$$

quand α se change en $\alpha + d\alpha$, $f(x, \alpha)$ devient $f(x, \alpha) + \frac{d.f(x, \alpha)}{d\alpha} d\alpha$, et l'on a

$$u + \frac{du}{d\alpha} d\alpha = \int \left[f(x, \alpha) + \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} d\alpha \right] dx ;$$

équation qui donne, en effaçant les termes égaux dans les deux membres, et en faisant sortir $d\alpha$ du signe $\int$ (ce qui est permis, puisque α est indépendant de x),

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{du}{d\alpha} = \int \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx.$$

Il est évident que ce résultat serait encore vrai, si au lieu de l'intégrale générale $\int f(x, \alpha)\, dx$, on avait l'intégrale définie $\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$, a et b étant des constantes indépendantes de α.

Soit maintenant

$$u = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

a et b étant des fonctions de α : la formule (1) prendra une forme moins simple, et deviendra

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df.(x, \alpha)}{d\alpha} dx + f(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha) \frac{da}{d\alpha}.$$

Pour le démontrer, désignons par $f_1(x, \alpha)$ l'intégrale générale $\int f(x, \alpha)\, dx$: nous aurons, par la notation même,

$$u = f_1(b, \alpha) - f_1(a, \alpha).$$

Différentiant les deux membres de cette équation par rapport à α, il viendra

$$\frac{du}{d\alpha} d\alpha = df_1(b, \alpha) - df_1(a, \alpha) ;$$

mais

$$df_1(b, \alpha) = \frac{df_1(b, \alpha)}{d\alpha} d\alpha + \frac{df_1(b, \alpha)}{db} db,$$

$$df_1(a, \alpha) = \frac{df_1(a, \alpha)}{d\alpha} d\alpha + \frac{df_1(a, \alpha)}{da} da,$$

$$db = \frac{db}{d\alpha} d\alpha, \quad da = \frac{da}{d\alpha} d\alpha;$$

d'où

$$df_1(b, \alpha) = \left[\frac{df_1(b, \alpha)}{d\alpha} + \frac{df_1(b, \alpha)}{db} \cdot \frac{db}{d\alpha}\right] d\alpha,$$

$$df_1(a, \alpha) = \left[\frac{df_1(a, \alpha)}{d\alpha} + \frac{df_1(a, \alpha)}{da} \cdot \frac{da}{d\alpha}\right] d\alpha,$$

et, par conséquent,

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{df_1(b, \alpha)}{d\alpha} - \frac{df_1(a, \alpha)}{d\alpha} + \frac{df_1(b, \alpha)}{db} \cdot \frac{db}{d\alpha} - \frac{df_1(a, \alpha)}{da} \cdot \frac{da}{d\alpha}.$$

Or, en vertu de la notation $f_1(x, \alpha) = \int f(x, \alpha)\, dx$, on a

$$\frac{df_1(b, \alpha)}{db} = f(b, \alpha), \quad \frac{df_1(a, \alpha)}{da} = f(a, \alpha),$$

$$\frac{df_1(b, \alpha)}{d\alpha} - \frac{df_1(a, \alpha)}{d\alpha} = \frac{d.}{d\alpha}[f_1(b, \alpha) - f_1(a, \alpha)] = \frac{d\int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{d\alpha};$$

et, en vertu du principe exprimé par l'équation (1), on peut écrire, en regardant a et b comme des constantes absolues,

$$\frac{d\int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx:$$

substituant donc à toutes ces quantités leurs valeurs, dans l'expression précédente de $\frac{du}{d\alpha}$, on trouve pour résultat la formule (2).

NOTE IV.

M. *Gudermann*, professeur de mathématiques à Munster, qui paraît avoir fait de profondes recherches sur le même sujet, regarde comme impossible la réduction générale des kappa circulaires, à des fonctions de deux arguments. Voici les paroles de ce savant :

« *In applicationibus analyseos ad geometriam, imprimis sphæricam et dynamicam, rarissimè incidimus in integrale quod sit naturæ* » *hyperbolicæ* (kappa logarithmique), *frequentissimè verò incidimus* » *in integralia quæ sunt cyclicæ* (kappa circulaires). *Incidit et ipse* » *Cl.mus Jacobi in errorem* (*si vera refert* Legendre, 2me supplément, » page 142, *nam hanc illius affirmationem alio non inveni loco*), *si* » *existimavit functiones quæ cyclicæ sunt naturæ, ac eas quæ hyperbolicæ sunt, in* formâ reali *reduci posse ad functiones duorum tantùm argumentorum.* » (*Journal de M. Crelle*, tome XIV, page 169.)

NOTE V.

Dans le chapitre XIV du *Traité des fonctions elliptiques*, Legendre indique une autre manière de parvenir à cette équation. Après avoir trouvé entre les fonctions complètes D et E, la relation

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad E = b^2\left(D + c\frac{dD}{dc}\right) = b^2\frac{d(cD)}{dc},$$

il ajoute : « D'après l'équation (1), on peut, pour la première approximation, faire $E = 1$; ce qui donnera $d.(cD) = \frac{dc}{b^2} = \frac{dc}{1-c^2}$ et, » par conséquent, $cD = \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+c}{1-c}\right)$. Mais, dans le même cas, on » a $c = 1 - \frac{1}{2}b^2$: donc, la première valeur approchée de D, est » $D = \log.\left(\frac{4}{b}\right)$. » Or, si l'on écrit au lieu de c sa valeur approchée $1 - \frac{1}{2}b^2$, la fonction complète D devient

$$D = \frac{1}{2-b^2}\log.\left(\frac{4-b^2}{b^2}\right) :$$

négligeant le carré de b vis-à-vis de 2 et de 4, on trouve $D = \log.\left(\frac{2}{b}\right)$; résultat bien éloigné de la vérité.

L'erreur de l'illustre géomètre que nous venons de citer, provient de ce qu'il n'a pas complété l'intégrale de l'équation $d(c\mathrm{D}) = \frac{dc}{1-c^2}$, par une constante arbitraire ; ce qui eût donné

$$\mathrm{D}(c) = \log.\left(\frac{2}{b}\right) + const.$$

On ne peut déterminer cette constante en faisant $c=0$, car la valeur approchée de D que l'on cherche, ne doit se vérifier que pour des valeurs de c très-peu différentes de l'unité : d'un autre côté, si l'on prend $c=1$, la fonction complète D devenant infinie, ainsi que $\log.\left(\frac{2}{b}\right)$, la constante reste indéterminée.

Pour lever cette difficulté, nous ferons remarquer que si l'on passe du module c au module c', on aura $b' < b$, et, par conséquent, *a fortiori*

$$\mathrm{D}(c') = \log.\left(\frac{2}{b'}\right) + const.;$$

d'où

$$\mathrm{D}(c') - \mathrm{D}(c) = \log.\frac{2}{b'} - \log.\frac{2}{b} = \log.\frac{b}{b'}.$$

Mais, en général, $\mathrm{D}(c') = (1+c)\mathrm{D}(c)$ (§ 78) : donc

$$\mathrm{D}(c') - \mathrm{D}(c) = c\mathrm{D}(c) = \log.\frac{b}{b'}.$$

Remplaçant c et b', par leurs valeurs approchées (§ 88)

$$c = 1 - \tfrac{1}{2}b^2, \quad b' = \frac{b^2}{4-b^2},$$

il vient simplement, en négligeant b^2 vis-à-vis de 2 et de 4,

$$\mathrm{D}(c) = \log.\frac{4}{b}.$$

NOTE VI.

Landen, géomètre anglais, a démontré que *tout arc d'hyperbole peut être exprimé par deux arcs d'ellipse* (*). Cette découverte mémorable se déduit aisément de la dernière équation mentionnée au § 90.

L'équation de l'hyperbole étant

$$y^2 = \frac{\mathfrak{c}^2}{\alpha^2}(x^2 - \alpha^2).$$

Si l'on prend cette courbe comme dans la figure 1re, de manière que son axe transverse 2α soit égal au double de l'excentricité $\overline{Af} = c$ de l'ellipse *dcbe*, tandis que son axe imaginaire $2\mathfrak{c}$ égale $2b$, on aura

$$y^2 = \frac{b^2}{c^2}(x^2 - c^2).$$

Introduisant un angle auxiliaire φ, tel que $y = b^2 \text{tang.}\,\varphi$, cette équation donne pour x la valeur

$$x = \frac{c}{\cos.\,\varphi}\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi} = \frac{c\Delta}{\cos.\,\varphi}:$$

par conséquent

$$dy = \frac{b^2 d\varphi}{\cos.^2\varphi},\quad dx = cd\left(\frac{\Delta}{\cos.\,\varphi}\right) = \frac{c \sin.\varphi\, d\varphi}{\Delta \cos.^2\varphi}(\Delta^2 - c^2 \cos.^2\varphi);$$

d'où

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^4 d\varphi^2}{\Delta^2 \cos.^4\varphi}:$$

donc, si l'on appelle U l'arc d'hyperbole *fn*, dont l'ordonnée extrême $\overline{nq} = y = b^2 \text{tang.}\,\varphi$, on aura

$$U = \int\sqrt{dx^2 + dy^2} = b^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta \cos.^2\varphi}.$$

(*) *Philosophical Transactions*, 1775. *Mathematical Memoirs*, by John Landen, 1780.

Remplaçant $\int \frac{d\varphi}{\Delta \cos.^2\varphi}$ par sa valeur trouvée au § 43, on obtiendra

$$U = \Delta \text{ tang.}\varphi - \text{eps.}(c, \varphi) + b^2 \text{ dig.}(c, \varphi) :$$

substituant à b^2 dig.(c, φ) sa valeur rapportée au § 90, cette expression devient

$$U = \Delta \text{ tang.}\varphi + \text{eps.}(c, \varphi) - 2(1+c) \text{ eps.}(c', \varphi') + 2c \sin.\varphi.$$

Nous allons prouver : 1° Que la quantité Δ tang. φ n'est autre chose que la tangente $\overline{nk}$, terminée par la perpendiculaire $\overline{Ak}$ abaissée du centre sur cette tangente. 2° Que la quantité c sin. φ est une moyenne proportionnelle entre $\overline{kg}$ et $\overline{nk}$.

Démonstration.

1° $Y = \alpha X + \beta$ étant l'équation générale d'une droite, on sait que la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur cette droite, est exprimée par $\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \overline{Ak}$. Si l'on dénote par x et y les coordonnées du point n, qui est à l'hyperbole, l'équation de la tangente à cette courbe sera

(1) . . . . . $c^2Yy - b^2Xx = -b^2c^2$;

d'où résultent pour α, β et $\overline{Ak}^2$ les déterminations suivantes :

$$\alpha = \frac{b^2x}{c^2y}, \quad \beta = -\frac{b^2}{y},$$

(2) . . . . . $\overline{Ak}^2 = \frac{c^4b^4}{c^4y^2 + b^4x^2}$.

On a de plus $\overline{An}^2 = x^2 + y^2$; d'où

$$\overline{nk}^2 = x^2 + y^2 - \overline{Ak}^2 = x^2 + y^2 - \frac{c^4b^4}{c^4y^2 + b^4x^2} :$$

réduisant au même dénominateur, il vient

$$\overline{nk}^2 = \frac{c^4x^2y^2 + c^4y^4 + b^4x^4 + b^4x^2y^2 - c^4b^4}{c^4y^2 + b^4x^2}.$$

Mais, en vertu de l'équation de la courbe, on a

$$c^4y^4 + b^4x^4 - b^4c^4 = 2b^2c^2x^2y^2 :$$

ainsi, la valeur précédente se réduit à

$$\overline{nk}^2 = \frac{c^4x^2y^2 + b^4x^2y^2 + 2b^2c^2x^2y^2}{c^4y^2 + b^4x^2} = \frac{x^2y^2}{c^4y^2 + b^4x^2}.$$

Mettant au lieu de x et de y leurs valeurs $\frac{c\Delta}{\cos.\varphi}$ et b^2 tang. φ, on obtient enfin

$$\overline{nk} = \Delta \text{ tang.}\varphi.$$

2° On a visiblement $\overline{gk}^2 = \overline{Ag}^2 - \overline{Ak}^2$. Pour trouver $\overline{Ag}$, il suffit de faire $Y = 0$ dans l'équation (1); ce qui donne X ou $\overline{Ag} = \frac{c^2}{x}$: et comme $\overline{Ak}^2$ est donné par l'équation (2), on trouve, après réduction,

$$(3). \quad . \quad . \quad \overline{gk}^2 = \frac{b^4c^4}{c^4y^2 + b^4x^2} \cdot \frac{c^4y^2}{b^4x^2} = \frac{c^4 \sin.^2\varphi \cos.^2\varphi}{\Delta^2} :$$

multipliant cette valeur par celle de $\overline{nk}^2$, on obtient finalement

$$\sqrt{\overline{gk} \times \overline{nk}} = c \sin.\varphi.$$

On peut remarquer qu'en vertu de l'équation (3), la ligne $\overline{gk}$ représente la quantité algébrique égale à la différence des arcs d'ellipse BM et AN dans la figure 5 (*voyez le* § 35).

NOTE VII.

L'équation (12), linéaire en k, est généralement d'un degré très-élevé, quand on y prend pour inconnue le module c; mais on lève sans peine cette difficulté, en recourant à la formule

$$b = h^p \sin.^4\mathfrak{c}_1 \sin.^4\mathfrak{c}_3 \ldots \sin.^4\mathfrak{c}_{p-2}$$

du § 118, qui fera connaître le complément de c. Si l'on se proposait de calculer numériquement la valeur de c ou de k, ce qu'il y aurait de plus avantageux, serait de faire usage de la relation transcendante $\frac{D(c)}{D(b)} = p \frac{D(k)}{D(h)}$ (§ 117), en s'aidant de la table des digamma complets. Dans le cas où l'on voudrait obtenir une approximation plus grande que celle que comporte cette table, la méthode qui nous paraît la plus expéditive, est celle qui porte le nom de *règle de fausse position*. Elle peut se démontrer de la manière suivante :

Étant proposée une équation quelconque

$$f(a) = 0,$$

on peut regarder a comme ce que devient x dans l'équation à deux variables $y = f(x)$, lorque $y = 0$: en d'autres termes, on peut re-

garder a comme l'abscisse du point m, où la courbe, caractérisée par $y = f(x)$, rencontre l'axe des x.

Cela posé, considérons deux points m' et m'', très-voisins du point m, l'un au-dessus et l'autre au-dessous de l'axe des x : si l'on fait passer une droite par ces deux points, il est évident que l'on pourra regarder l'intersection de cette droite avec l'axe des x, comme sensiblement la même que celle de la courbe avec cet axe. Ainsi, l'abscisse de cette intersection donnera la valeur de a avec une approximation, d'autant plus grande que les points m' et m'' seront plus rapprochés.

Soient maintenant x', y', x'', y'', les coordonnées des points m' et m'' : l'équation de la droite en question sera

$$Y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(X - x'),$$

et si l'on fait $Y = 0$, on en déduira

$$X = \frac{y'x'' - y''x'}{y' - y''}.$$

Pour appliquer cette formule à l'équation proposée $f(a) = 0$, on substituera successivement dans cette dernière, au lieu de a, des valeurs numériques arbitraires x' et x'', qui rendront le second membre respectivement égal à y' et à y''; en ayant soin toutefois de prendre x'', tel que y'' et y' soient de signe contraire, afin que la véritable valeur $x = a$, se trouve comprise entre x' et x''. Ayant déterminé la valeur de X par la formule précédente, pour la substituer à son tour dans l'équation proposée, le signe du résultat indiquera si a est compris entre x' et X, ou entre X et x''. En continuant de la sorte, on resserrera indéfiniment les limites de a.

FIN DES NOTES.

TABLE DES NOMES,

Contenant les logarithmes vulgaires de la fonction log. vulg. $\frac{1}{q}$, calculés pour tous les angles du module, de dixième en dixième de degré, depuis 0° jusqu'à 45°; avec 14 décimales pour les 15 premiers degrés, et 12 décimales pour tous les autres.

L'angle du module, qui sert d'argument, est désigné par θ.

θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.	θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.
0°.0	Infini.	2°.5	0.593 767 444 276 65
0.1	0.827 392 863 068 68	2.6	0.589 979 683 155 88
0.2	0.786 631 078 523 40	2.7	0.586 303 337 183 79
0.3	0.760 883 733 106 36	2.8	0.582 730 919 369 00
0.4	0.741 643 289 905 52	2.9	0.579 255 693 567 94
0.5	0.726 109 120 068 08	3.0	0.575 871 576 050 13
0.6	0.712 990 843 025 10	3.1	0.572 573 052 792 55
0.7	0.701 581 657 955 73	3.2	0.569 355 109 609 13
0.8	0.691 450 278 987 35	3.3	0.566 213 172 555 89
0.9	0.682 313 196 899 09	3.4	0.563 143 057 462 38
1.0	0.673 973 575 618 32	3.5	0.560 140 926 002 99
1.1	0.666 288 904 356 32	3.6	0.557 203 248 215 82
1.2	0.659 162 520 446 95	3.7	0.554 326 769 857 13
1.3	0.652 482 408 950 56	3.8	0.551 508 484 020 04
1.4	0.646 214 081 092 78	3.9	0.548 745 606 340 67
1.5	0.640 295 864 546 46	4.0	0.546 035 553 258 66
1.6	0.634 685 684 535 93	4.1	0.543 375 922 889 26
1.7	0.629 348 801 238 96	4.2	0.540 763 578 137 51
1.8	0.624 256 180 572 86	4.3	0.538 199 131 744 63
1.9	0.619 383 296 120 48	4.4	0.535 677 933 006 90
2.0	0.614 709 231 679 05	4.5	0.533 199 055 944 13
2.1	0.610 215 997 907 00	4.6	0.530 760 788 734 44
2.2	0.605 888 004 339 46	4.7	0.528 361 524 251 50
2.3	0.601 711 646 065 07	4.8	0.525 999 751 570 83
2.4	0.597 674 976 310 56	4.9	0.523 674 048 331 99
2.5	0.593 767 444 276 65	5.0	0.521 383 073 837 74

θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.	θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.
5°.0	0.521 383 073 837 74	10°.0	0.434 273 429 881 11
5.1	0.519 125 562 830 60	10.1	0.432 883 157 453 08
5.2	0.516 900 319 851 12	10.2	0.431 502 039 676 06
5.3	0.514 706 214 116 86	10.3	0.430 129 910 281 14
5.4	0.512 542 174 869 83	10.4	0.428 766 607 519 41
5.5	0.510 407 187 129 65	10.5	0.427 411 973 996 30
5.6	0.508 300 287 837 93	10.6	0.426 065 856 513 39
5.7	0.506 220 562 308 59	10.7	0.424 728 105 917 17
5.8	0.504 167 140 998 46	10.8	0.423 398 576 954 86
5.9	0.502 139 196 529 12	10.9	0.422 077 128 136 35
6.0	0.500 135 940 971 54	11.0	0.420 763 621 603 70
6.1	0.498 156 623 330 43	11.1	0.419 457 923 002 65
6.2	0.496 200 527 235 60	11.2	0.418 159 901 364 62
6.3	0.494 266 968 812 32	11.3	0.416 869 428 990 08
6.4	0.492 355 294 708 31	11.4	0.415 586 381 338 51
6.5	0.490 464 880 283 75	11.5	0.414 310 636 922 70
6.6	0.488 595 127 916 03	11.6	0.413 042 077 206 91
6.7	0.486 745 465 442 78	11.7	0.411 780 586 510 64
6.8	0.484 915 344 710 13	11.8	0.410 526 051 914 64
6.9	0.483 104 240 227 59	11.9	0.409 278 363 172 17
7.0	0.481 311 647 911 25	12.0	0.408 037 412 623 13
7.1	0.479 537 083 919 54	12.1	0.406 803 095 111 63
7.2	0.477 780 083 564 82	12.2	0.405 575 307 907 25
7.3	0.476 040 200 297 38	12.3	0.404 353 950 629 14
7.4	0.474 317 004 757 90	12.4	0.403 138 925 172 85
7.5	0.472 610 083 890 83	12.5	0.401 930 135 640 54
7.6	0.470 919 040 114 87	12.6	0.400 727 488 273 53
7.7	0.469 243 490 545 75	12.7	0.399 530 891 387 47
7.8	0.467 583 066 268 22	12.8	0.398 340 255 309 91
7.9	0.465 937 411 652 29	12.9	0.397 155 492 320 54
8.0	0.464 306 183 711 74	13.0	0.395 976 516 593 28
8.1	0.462 689 051 500 69	13.1	0.394 803 244 140 57
8.2	0.461 085 695 546 50	13.2	0.393 635 592 759 96
8.3	0.459 495 807 315 97	13.3	0.392 473 481 982 53
8.4	0.457 919 088 712 15	13.4	0.391 316 833 022 83
8.5	0.456 355 251 600 13	13.5	0.390 165 568 731 25
8.6	0.454 804 017 360 18	13.6	0.389 019 613 547 59
8.7	0.453 265 116 465 12	13.7	0.387 878 893 456 53
8.8	0.451 738 288 081 62	13.8	0.386 743 335 944 55
8.9	0.450 223 279 693 28	13.9	0.385 612 869 958 32
9.0	0.448 719 846 743 92	14.0	0.384 487 425 864 56
9.1	0.447 227 752 300 11	14.1	0.383 366 935 411 51
9.2	0.445 746 766 731 37	14.2	0.382 251 331 691 39
9.3	0.444 276 667 407 42	14.3	0.381 140 549 104 20
9.4	0.442 817 238 410 86	14.4	0.380 034 523 322 90
9.5	0.441 368 270 264 58	14.5	0.378 933 191 259 57
9.6	0.439 929 559 673 20	14.6	0.377 836 491 032 84
9.7	0.438 500 909 278 26	14.7	0.376 744 361 936 34
9.8	0.437 082 127 419 54	14.8	0.375 656 744 408 13
9.9	0.435 673 027 923 41	14.9	0.374 573 580 001 07
10.0	0.434 273 429 881 11	15.0	0.373 494 811 354 50

θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.	θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.
15°.0	0.373 494 811 354	20°.0	0.324 141 946 314
15.1	0.372 420 382 165	20.1	0.323 230 121 552
15.2	0.371 350 237 163	20.2	0.322 320 721 359
15.3	0.370 284 322 086	20.3	0.321 413 720 901
15.4	0.369 222 583 651	20.4	0.320 509 095 670
15.5	0.368 164 969 542	20.5	0.319 606 821 482
15.6	0.367 111 428 329	20.6	0.318 706 874 475
15.7	0.366 061 909 558	20.7	0.317 809 231 091
15.8	0.365 016 363 628	20.8	0.316 913 868 080
15.9	0.363 974 741 811	20.9	0.316 020 762 492
16.0	0.362 936 996 217	21.0	0.315 129 892 267
16.1	0.361 903 079 788	21.1	0.314 241 233 239
16.2	0.360 872 946 273	21.2	0.313 354 765 122
16.3	0.359 846 550 206	21.3	0.312 470 465 506
16.4	0.358 823 846 890	21.4	0.311 588 312 858
16.5	0.357 804 792 375	21.5	0.310 708 285 910
16.6	0.356 789 343 447	21.6	0.309 830 363 663
16.7	0.355 777 457 608	21.7	0.308 954 525 369
16.8	0.354 769 093 058	21.8	0.308 080 750 539
16.9	0.353 764 208 685	21.9	0.307 209 018 931
17.0	0.352 762 764 041	22.0	0.306 339 310 549
17.1	0.351 764 719 332	22.1	0.305 471 605 638
17.2	0.350 770 035 402	22.2	0.304 605 884 677
17.3	0.349 778 673 724	22.3	0.303 742 128 381
17.4	0.348 790 596 380	22.4	0.302 880 317 690
17.5	0.347 805 766 047	22.5	0.302 020 433 771
17.6	0.346 824 145 981	22.6	0.301 162 458 012
17.7	0.345 845 700 019	22.7	0.300 306 372 015
17.8	0.344 870 392 553	22.8	0.299 452 157 596
17.9	0.343 898 188 523	22.9	0.298 599 796 783
18.0	0.342 929 053 401	23.0	0.297 749 271 805
18.1	0.341 962 955 186	23.1	0.296 900 565 097
18.2	0.340 999 854 390	23.2	0.296 053 659 292
18.3	0.340 039 724 029	23.3	0.295 208 537 217
18.4	0.339 082 529 608	23.4	0.294 365 181 893
18.5	0.338 128 239 111	23.5	0.293 523 576 531
18.6	0.337 176 820 993	23.6	0.292 683 704 527
18.7	0.336 228 244 176	23.7	0.291 845 549 458
18.8	0.335 282 478 029	23.8	0.291 009 095 085
18.9	0.334 339 492 365	23.9	0.290 174 325 341
19.0	0.333 399 257 433	24.0	0.289 341 224 338
19.1	0.332 461 743 909	24.1	0.288 509 776 356
19.2	0.331 526 922 881	24.2	0.287 679 965 844
19.3	0.330 594 765 847	24.3	0.286 851 777 417
19.4	0.329 665 244 704	24.4	0.286 025 195 855
19.5	0.328 738 331 741	24.5	0.285 200 206 094
19.6	0.327 813 999 636	24.6	0.284 376 793 232
19.7	0.326 892 221 440	24.7	0.283 554 942 520
19.8	0.325 972 970 573	24.8	0.282 734 639 363
19.9	0.325 056 220 817	24.9	0.281 915 869 315
20.0	0.324 141 946 314	25.0	0.281 098 618 079

θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.	θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.
25°.0	0.281 098 618 079	30°.0	0.241 893 537 935
25.1	0.280 282 871 505	30.1	0.241 137 636 034
25.2	0.279 468 615 586	30.2	0.240 382 666 951
25.3	0.278 655 836 452	30.3	0.239 628 621 737
25.4	0.277 844 520 378	30.4	0.238 875 491 508
25.5	0.277 034 653 773	30.5	0.238 123 267 447
25.6	0.276 226 223 181	30.6	0.237 371 940 802
25.7	0.275 419 215 277	30.7	0.236 621 502 884
25.8	0.274 613 616 868	30.8	0.235 871 945 066
25.9	0.273 809 414 892	30.9	0.235 123 268 785
26.0	0.273 006 596 410	31.0	0.234 375 435 537
26.1	0.272 205 148 609	31.1	0.233 628 466 880
26.2	0.271 405 058 798	31.2	0.232 882 344 428
26.3	0.270 606 314 408	31.3	0.232 137 059 857
26.4	0.269 808 902 987	31.4	0.231 392 604 901
26.5	0.269 012 812 204	31.5	0.230 648 971 348
26.6	0.268 218 029 841	31.6	0.229 906 151 042
26.7	0.267 424 543 793	31.7	0.229 164 135 887
26.8	0.266 632 342 070	31.8	0.228 422 917 836
26.9	0.265 841 412 789	31.9	0.227 682 488 899
27.0	0.265 051 744 178	32.0	0.226 942 841 138
27.1	0.264 263 324 572	32.1	0.226 203 966 669
27.2	0.263 476 142 408	32.2	0.225 465 857 655
27.3	0.262 690 186 232	32.3	0.224 728 506 314
27.4	0.261 905 444 690	32.4	0.223 991 904 915
27.5	0.261 121 906 529	32.5	0.223 256 045 773
27.6	0.260 339 560 595	32.6	0.222 520 921 253
27.7	0.259 558 395 834	32.7	0.221 786 523 769
27.8	0.258 778 401 286	32.8	0.221 052 845 781
27.9	0.257 999 566 089	32.9	0.220 319 879 798
28.0	0.257 221 879 471	33.0	0.219 587 618 372
28.1	0.256 445 330 754	33.1	0.218 856 054 103
28.2	0.255 669 909 352	33.2	0.218 125 179 633
28.3	0.254 895 604 769	33.3	0.217 394 987 652
28.4	0.254 122 406 596	33.4	0.216 665 470 892
28.5	0.253 350 304 511	33.5	0.215 936 622 126
28.6	0.252 579 288 279	33.6	0.215 208 434 171
28.7	0.251 809 347 748	33.7	0.214 480 899 886
28.8	0.251 040 472 852	33.8	0.213 754 012 170
28.9	0.250 272 653 607	33.9	0.213 027 763 963
29.0	0.249 505 880 107	34.0	0.212 302 148 247
29.1	0.248 740 142 529	34.1	0.211 577 158 041
29.2	0.247 975 431 127	34.2	0.210 852 786 403
29.3	0.247 211 736 233	34.3	0.210 129 026 429
29.4	0.246 449 048 256	34.4	0.209 405 871 256
29.5	0.245 687 357 682	34.5	0.208 683 314 054
29.6	0.244 926 655 069	34.6	0.207 961 348 032
29.7	0.244 166 931 047	34.7	0.207 239 966 435
29.8	0.243 408 176 321	34.8	0.206 519 162 544
29.9	0.242 650 381 669	34.9	0.205 798 929 672
30.0	0.241 893 537 935	35.0	0.205 079 261 171

θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.	θ.	Log. de log. $\frac{1}{q}$.
35°.0	0.205 079 261 171	40°.0	0.169 677 114 134
35.1	0.204 360 150 424	40.1	0.168 978 077 620
35.2	0.203 641 590 850	40.2	0.168 279 296 384
35.3	0.202 923 575 898	40.3	0.167 580 765 004
35.4	0.202 206 099 054	40.4	0.166 882 478 071
35.5	0.201 489 153 831	40.5	0.166 184 430 188
35.6	0.200 772 733 778	40.6	0.165 486 615 971
35.7	0.200 056 832 472	40.7	0.164 789 030 049
35.8	0.199 341 443 523	40.8	0.164 091 667 062
35.9	0.198 626 560 570	40.9	0.163 394 521 666
36.0	0.197 912 177 284	41.0	0.162 697 588 525
36.1	0.197 198 287 362	41.1	0.162 000 862 314
36.2	0.196 484 884 530	41.2	0.161 304 337 719
36.3	0.195 771 962 547	41.3	0.160 608 009 439
36.4	0.195 059 515 197	41.4	0.159 911 872 183
36.5	0.194 347 536 290	41.5	0.159 215 920 668
36.6	0.193 636 019 665	41.6	0.158 520 149 623
36.7	0.192 924 959 188	41.7	0.157 824 553 787
36.8	0.192 214 348 751	41.8	0.157 129 127 907
36.9	0.191 504 182 270	41.9	0.156 433 866 738
37.0	0.190 794 453 690	42.0	0.155 738 765 047
37.1	0.190 085 156 979	42.1	0.155 043 817 606
37.2	0.189 376 286 131	42.2	0.154 349 019 196
37.3	0.188 667 835 162	42.3	0.153 654 364 606
37.4	0.187 959 798 115	42.4	0.152 959 848 635
37.5	0.187 252 169 053	42.5	0.152 265 466 087
37.6	0.186 544 942 065	42.6	0.151 571 211 772
37.7	0.185 838 111 269	42.7	0.150 877 080 508
37.8	0.185 131 670 773	42.8	0.150 183 067 120
37.9	0.184 425 614 759	42.9	0.149 489 166 439
38.0	0.183 719 937 393	43.0	0.148 795 373 303
38.1	0.183 014 632 874	43.1	0.148 101 682 553
38.2	0.182 309 695 419	43.2	0.147 408 089 035
38.3	0.181 605 119 269	43.3	0.146 714 587 602
38.4	0.180 900 898 683	43.4	0.146 021 173 115
38.5	0.180 197 027 939	43.5	0.145 327 840 434
38.6	0.179 493 501 336	43.6	0.144 634 584 425
38.7	0.178 790 313 192	43.7	0.143 941 399 959
38.8	0.178 087 457 843	43.8	0.143 248 281 909
38.9	0.177 384 929 644	43.9	0.142 555 225 155
39.0	0.176 682 722 968	44.0	0.141 862 224 577
39.1	0.175 980 832 205	44.1	0.141 169 275 058
39.2	0.175 279 251 760	44.2	0.140 476 371 484
39.3	0.174 577 976 061	44.3	0.139 783 508 746
39.4	0.173 876 999 550	44.4	0.139 090 681 734
39.5	0.173 176 316 683	44.5	0.138 397 885 341
39.6	0.172 475 921 933	44.6	0.137 705 114 461
39.7	0.171 775 809 791	44.7	0.137 012 363 989
39.8	0.171 075 974 762	44.8	0.136 319 628 821
39.9	0.170 376 411 364	44.9	0.135 626 903 857
40.0	0.169 677 114 134	45.0	0.134 934 185 995

ERRATA.

Page 78, ligne 3, au lieu de $\log.\left(\frac{1+\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,x}{1+\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,x}\right)$,

lisez : $\log.\left(\frac{1+\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,x}{1-\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,x}\right)$.

Page 192, ligne 4, au lieu de

$$-\frac{1}{16}\log.(1+c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,})-\frac{1}{16}\log.(1-c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,})-\text{etc.},$$

lisez :

$$+\frac{1}{16}\log.(1+c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,})-\frac{1}{16}\log.(1-c_{,,}\sin.^2\varphi_{,,})+\text{etc.}$$

TABLE DES MATIÈRES.

PRÉFACE . . . . . page I
Notice historique sur Legendre VIII
Tableau des notations XI
Tableau de quelques quadratures XII

CHAPITRE PREMIER. *De l'intégrale* $\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$ . . page 1

Évanouissement des puissances impaires de x sous le radical. . . . . § 1
Évanouissement des puissances impaires de la variable, dans la fonction rationnelle qui accompagne le radical . . . . . § 2 à 4
Transcendantes nouvelles provenant de l'intégrale $\int \frac{P dx}{R}$ . . . . . § 5

CHAPITRE II. *Réduction de la différentielle* $\frac{P dx}{R}$ *aux fonctions elliptiques. — Classification de ces fonctions. — Réduction de la différentielle* $\frac{Q d\varphi}{\Delta}$. page 12

Discussion du radical $\sqrt{\pm 1 \pm \beta x^2 \pm \gamma x^4}$. Réduction de l'intégrale $\int \frac{dx}{R}$ à la forme $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}}$ . . . . . § 6
Réduction des deux intégrales $\int \frac{x^2 dx}{R}$ et $\int \frac{dx}{(x^2+a) R}$, à trois autres transcendantes . . . . . § 7
Type des fonctions elliptiques; expressions analytiques de ces transcendantes; leur division en trois espèces. Notations du radical $\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}$. Définition de l'amplitude, du module, de l'angle du module, du complément du module, du paramètre et de l'angle du paramètre. Noms imposés aux fonctions elliptiques; notations de ces transcendantes . . . . . § 8
Propriétés communes aux fonctions elliptiques des trois espèces. Ce que c'est que les fonctions complètes; leurs notations . . . . . § 9
Digression sur l'intégrale $\int \frac{dp}{1-\zeta^2 p^2}$ . . . . . § 10
Discussion et réduction aux fonctions elliptiques, des trois transcendantes mentionnées au § 7. . . . . § 11

Remarque sur le cas d'imaginarité de la constante a, contenue dans l'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2+a)R}$ . . . . . § 12
Résumé . . . . . § 13
Formule pour réduire l'intégrale $\int \frac{Q d\varphi}{\Delta}$ aux fonctions elliptiques ; cas où son emploi n'est pas avantageux. . . . . §§ 14 et 15

CHAPITRE III. *Propriétés générales des digamma de même module.* . page 34

Représentation géométrique des digamma. Équation polaire de la fausse ellipse ; construction de cette courbe par points. . . . . § 16
Propriété fondamentale des digamma. . . . . § 17
Formules relatives à la somme et à la différence de deux digamma. . . . § 18
Relations entre les amplitudes de deux digamma complémentaires. Propriété remarquable de la fausse ellipse. Limites de la fonction digamma ; changement de nature de cette transcendante. . . . . § 19
Multiplication et division des digamma . . . . . § 20 à 22
Procédé graphique pour multiplier les digamma . . . . . § 23
Formule relative à l'amplitude de la somme de trois digamma. . . . . § 24
Transformation imaginaire des digamma. Formule qui donne la tangente de l'amplitude d'un digamma égal à la somme de trois autres . . . . . § 25
Formules relatives aux amplitudes de digamma imaginaires . . . . . § 26
Représentation des amplitudes de trois digamma, par les côtés d'un triangle sphérique . . . . . § 27

CHAPITRE IV. *Propriétés générales des epsilon de même module* . . page 61

Représentations géométriques des epsilon, et limites de cette fonction . §§ 28 et 29
Propriété fondamentale des epsilon . . . . . § 30
Transformation imaginaire des epsilon . . . . . § 31
Expression de l'epsilon qui correspond à la somme de trois digamma . . . § 32
Développement de l'epsilon en fonction du digamma de même amplitude . . § 33
Comparaison des fonctions composées d'epsilon et de digamma de même amplitude. Multiplication et division des epsilon. . . . . § 34
Construction des epsilon qui correspondent à des digamma complémentaires. Théorème de Fagnani. . . . . § 35
Propriété des rayons vecteurs de l'ellipse. Espèce de bisection du quart d'ellipse. Relation entre les quatre fonctions D(b), D(c), E(b) et E(c) . . . . . § 36

CHAPITRE V. *Propriétés générales des kappa de même module et de même amplitude* . . . . . page 74

Division des kappa à paramètre réel, en deux classes irréductibles entre elles. § 37 à 39
Ce qu'on entend par kappa circulaires et par kappa logarithmiques ; types normaux de ces deux classes de kappa. Notations nouvelles. . . . . § 40

Propriété des kappa logarithmiques de même module et de même amplitude, dont les angles des paramètres correspondent à des digamma complémentaires . . . . . § 41
Transformation imaginaire des kappa. Propriété des kappa circulaires de même module et de même amplitude, dont les angles des paramètres correspondent à des digamma complémentaires . . . . . § 42
Réduction des kappa circulaires qui ont pour type du paramètre $n = \cot.^2\theta$, à d'autres kappa dont les paramètres ont pour type $n = c \sin.\theta$. Valeurs des transcendantes kap. $(\pm c, c, \varphi)$, kap. $(-c^2, c, \varphi)$, kap. $(-1, c, \varphi)$ . . . § 43
Réduction des kappa dont le paramètre est imaginaire . . . . . § 44 à 49
Représentation géométrique des kappa. Construction de la courbe des kappa au moyen de deux ellipses. Relation entre la courbe des kappa et la fausse ellipse . . . . . § 50
Limites de la fonction kappa. . . . . § 51

CHAPITRE VI. *Propriétés générales des kappa de même paramètre et de même module. — Théorème sur les kappa complets. — Relations entre l'amplitude et l'angle du paramètre.—Propriété des fonctions complètes des deux premières espèces* . . . . . page 95

Comparaison des kappa qui ne diffèrent que par leur amplitude. . . § 52 à 54
Tout kappa complet peut s'exprimer par des digamma et des epsilon. Différentiation du paramètre; application aux kappa circulaires normaux. Permutation entre l'angle du paramètre et l'amplitude des kappa circulaires. Dans quels cas les kappa circulaires non complets peuvent s'exprimer par des fonctions d'un ordre inférieur. . . . . § 55 à 57
Permutation entre l'angle du paramètre et l'amplitude des kappa logarithmiques. Dans quels cas les kappa logarithmiques non complets peuvent s'exprimer par des fonctions d'un ordre inférieur. . . . . §§ 58 et 59
Propriété des fonctions complètes des deux premières espèces, dont les modules sont complémentaires . . . . . § 60

CHAPITRE VII. *De la transcendante* ϒ . . . . . page 107

Considérations sur la réduction des kappa à des fonctions de deux arguments. § 61
Expression de la transcendante ϒ; usage de cette transcendante pour réduire les kappa logarithmiques; sa représentation géométrique. . . . . §§ 62 et 63
Propriétés générales des upsilon. Courbe des upsilon . . . . . §§ 64 et 65
Détermination de l'upsilon correspondant à un digamma, dont la valeur est égale soit au double soit à la moitié d'un digamma donné. Formules pour le calcul numérique des upsilon . . . . . § 66
Expression de la transcendante upsilon par une intégrale définie; dans quels cas cette transcendante peut se réduire à des fonctions d'une espèce inférieure aux kappa . . . . . § 67
Réduction des kappa circulaires à des fonctions imaginaires de deux arguments. § 68

CHAPITRE VIII. *Développement des fonctions elliptiques en séries.* . page 121

Développements du digamma suivant les puissances du module ou de son complément . . . . . § 69
Relation entre les fonctions complètes D et E. Équations différentielles dont dépend le digamma complet ; solutions approchées de ces équations. . . . § 70
Développements du digamma suivant les sinus des multiples de l'amplitude. . § 71
Développements de l'epsilon suivant les puissances du module ou de son complément . . . . . § 72
Développements des kappa circulaires normaux, suivant les puissances du module et du paramètre. . . . . § 73
Développements de la fonction générale kap.(n, c, φ), suivant les sinus des multiples de l'amplitude . . . . . § 74
Remarque sur une certaine classe de fonctions de l'amplitude, qui entrent dans les développements des transcendantes elliptiques. . . . . § 75
Développements des kappa logarithmiques normaux, suivant les puissances du module et du paramètre . . . . . § 76
Développements des fonctions dig. (c, φ), dig. (b, φ), suivant les puissances de tang.$\frac{1}{2}\varphi$ . . . . . § 77

CHAPITRE IX. *Transformation du module dans les digamma* . . page 146

Formation d'une échelle de modules. Détermination de l'amplitude correspondante à chaque module, pour un même digamma. Loi des amplitudes croissantes. . . . . §§ 78 et 79
Méthode des modules décroissants, pour calculer le digamma au moyen de l'amplitude, et *vice versâ*. Définition de l'angle-limite. . . . . § 80 à 85
Méthode des modules croissants, pour calculer le digamma au moyen de l'amplitude. Valeurs approchées du digamma complet. . . . . § 86 à 88
Relation entre les digamma complets $D(c)$, $D(b)$, $D(c_{,})$, $D(b_{,})$ . . . . § 89

CHAPITRE X. *Transformation du module dans les epsilon* . . . page 161

Tout digamma peut s'exprimer par deux épsilon . . . . . § 90
Suite infinie d'epsilon. Méthode des modules décroissants, pour le calcul de la transcendante G, composée d'un epsilon et d'un digamma. Valeur de la fonction complète. Méthode des modules croissants. Valeur de la fonction complète. Application des formules précédentes aux epsilon . . . § 91 à 97

CHAPITRE XI. *Transformation du module dans les kappa et dans les upsilon* . . . . . page 174

Calcul de la fonction H, composée d'un kappa et d'un digamma, par la méthode des modules décroissants . . . . . § 98 à 101
Calcul de la fonction H, dans le cas ou b^2 est négligeable ; limite des erreurs de ce calcul. Valeur de la fonction complète . . . . . § 102

Remarques sur les formules d'approximation précédentes, et sur l'application de la méthode des modules croissants, aux fonctions elliptiques de la troisième espèce . . . . . §§ 103 et 104
Loi suivant laquelle les paramètres décroissants se déduisent l'un de l'autre, dans les kappa circulaires . . . . . § 105
Application de la méthode des modules décroissants, au calcul de la transcendante ϒ . . . . . §§ 106 et 107
Application de la méthode des modules croissants, au calcul de la transcendante ϒ . . . . . § 108

CHAPITRE XII. *Théorème de M. Jacobi* . . . . . page 194

Démonstration du théorème de M. Jacobi . . . . . § 109 à 114
Transformations de la formule (A) . . . . . § 115
Relation entre les fonctions complètes D(*c*) et D(*k*). . . . . § 116
Comment on passe des modules primitifs *c* et *k* à leurs compléments *b* et *h*, sans changer le régulateur. Relation entre les digamma complets D(*c*), D(*k*), D(*b*) et D(*h*). . . . . § 117
Comment on passe de la relation entre deux digamma, qui fait l'objet du théorème de M. Jacobi, à une autre relation qui ne diffère de la première que par l'amplitude du premier digamma et par le régulateur. Loi de multiplication des digamma par un nombre impair quelconque . . . . . § 118
Ce que devient le théorème de M. Jacobi, lorsque l'indice est infini. Formule qui détermine algébriquement le sinus de l'amplitude, lorsque le digamma est donné . . . . . § 119
Formation de nouvelles échelles de modules, d'après le théorème de M. Jacobi. § 120
Relations entre l'échelle de modules de Lagrange et le nombre 2 . . . . § 121

CHAPITRE XIII. *Des transcendantes* Θ, Λ, Ω et T . . . . . page 225

Détermination, sous forme finie, des coefficients A, B, C, exprimés par des séries dans le chapitre précédent . . . . . § 122 à 124
Séries qui constituent les transcendantes Θ et Λ; expressions très-simples de plusieurs formules au moyen de ces transcendantes. . . . . § 125
Propriétés principales des fonctions Θ et Λ . . . . . §§ 126 et 127
Nouvelles expressions de l'epsilon indéfini, de l'epsilon complet, et de la fonction ϒ. . . . . §§ 128 et 129
Réduction des kappa logarithmiques, à l'aide de la fonction Θ. . . . . § 130
De la transcendante Ω, et de ses relations avec les kappa circulaires. §§ 131 et 132
De la transcendante T, et de ses relations avec les epsilon et les upsilon . . § 133
Relations entre les transcendantes Θ, ϒ, T et Λ . . . . . § 134

CHAPITRE XIV. *Méthode des nomes* . . . . . page 252

Définition et propriétés du nome, de l'angle du nome, et du complément du nome . . . . . § 135

Changement de q en q^2, et de x en $2x$ . . . . . § 136
Expression transcendante de la loi par laquelle on déduit la fonction kap.$(n_{,,}, c_{,,}, \varphi_{,})$, de la fonction primitive kap.(n, c, φ) . . . . . § 137
Formules pour calculer les fonctions complètes des deux premières espèces, avec un grand nombre de décimales exactes. . . . . § 138 à 140
Usage des formules trouvées au chapitre précédent, pour calculer les fonctions de seconde et de troisième espèce. . . . . § 141

CHAPITRE XV. *Usage et construction des tables elliptiques* . . . page 262

Notions du calcul des différences finies . . . . . § 142
De l'interpolation en général. Formule d'interpolation pour les tables à simple entrée. Exemples . . . . . §§ 143 et 144
Interpolation des tables à double entrée . . . . . § 145 à 147
Exemple d'interpolation des tables elliptiques à double entrée . . . . . § 148
Construction des tables elliptiques. Méthode des quadratures mécaniques . . . . . § 149 à 151
Construction d'une table d'upsilon . . . . . § 152
Emploi d'une formule déduite du calcul des différences; démonstration de cette formule . . . . . § 153 à 156

CHAPITRE XVI. *Réduction de quelques intégrales aux transcendantes elliptiques* . . . . . page 287

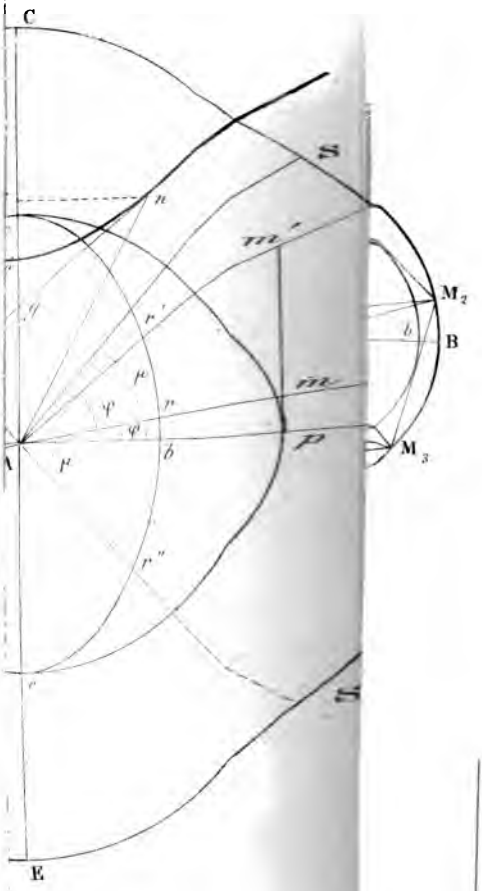
Discussion de douze cas principaux, où l'intégrale proposée se ramène aux fonctions elliptiques . . . . . § 157

NOTES.

Note première . . . . . page 293
Note II. Sur la lemniscate. 294
Note III. Principes de la différentiation sous le signe $\int$. 296
Note IV 298
Note V. Sur une erreur de Legendre . . . . . *Ib.*
Note VI. Démonstration du théorème de Landen, que tout arc d'hyperbole peut être mesuré par deux arcs d'ellipse 300
Note VII. Démonstration de la règle de fausse position 302

Table des nomes. 305

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.


C
S
n
m'
M2
B
b
m
p
M3
A
r'
r''
E

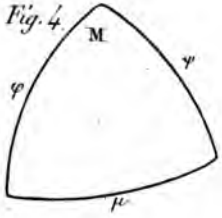


Fig. 4.
M
φ
φ
μ

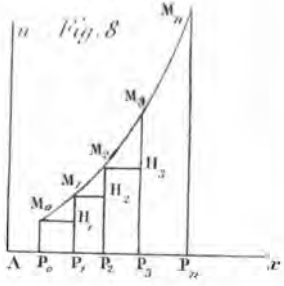


Fig. 8
n
Mn
M3
M2
M1
M0
H3
H2
H1
A
P0
P1
P2
P3
Pn
x

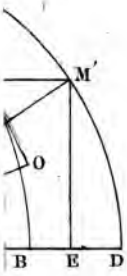
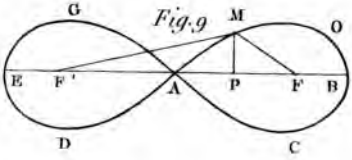


Fig. 5
M'
O
B
E
D


G
Fig. 9
M
O
E
F'
A
P
F
B
D
C

MAR 27 1885